Заседание совместного семинара ГМЦ - СибНИГМИ, 20.10.2023

Несколько слов о чувствительности локальной предсказуемости к начальному состоянию и неопределенности модели.

Относительное влияние начальных условий и неопределенностей модели на локальную предсказуемость является важным вопросом в теории предсказуемости динамики погоды в атмосфере.

Прогнозирование хаотических систем является важной реальной, но сложной проблемой. По определению хаотические системы проявляют высокую чувствительность к начальным условиям: две изначально близкие траектории могут экспоненциально расходиться в фазовом пространстве со скоростью, определяемой наибольшим показателем Ляпунова λ_1. Если начальное возмущение имеет размер δ, а принятый допустимый уровень ошибки Δ мал, то наибольший показатель Ляпунова λ_1 дает грубую оценку времени предсказуемости:

$$T_{pedict} \approx \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)$$

Однако использование наибольшего показателя Ляпунова в большинстве ситуаций оказывается значительным упрощением. По большому счету это так, потому что наибольший показатель Ляпунова, который мы будем называть глобальным показателем Ляпунова, определяется как долгосрочная средняя скорость роста очень маленькой начальной ошибки.

Рассмотрим n-мерную динамическую систему с непрерывным временем.

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{F}(\vec{X}(t,\alpha)) \qquad \vec{X}=(x_1,\ldots,x_n)^T$$

Пусть $\delta(t)=\vec{X}(t)-\vec{X}_0(t)$ обозначает отклонения от опорной точки орбиты $X_0(t)$.

Ее эволюция описывается уравнением

$$\frac{d\delta}{dt}=\vec{J}(\vec{X})\delta+\vec{G}(\vec{X},\delta)$$

Предположим, что начальные возмущения настолько малы, что их эволюция может приближенно определяться линейными уравнениями:

$$\frac{d\delta}{dt}=\vec{J}(\vec{X})\delta$$

Локальный показатель Ляпунова

Интегрирование линеаризованных уравнений вдоль опорной орбиты дает линейный пропагатор

$$\eta(\vec{X}_0, t)$$

который переводит любую бесконечно малую начальную ошибку δ(0) вперед за время t до $\delta_\mu(t)$:

$$\delta_\eta(t) = \eta(\vec{X}_0, t)\delta(0), \ \vec{X}_0 = \vec{X}_0(0)$$

Тогда наибольший показатель Ляпунова определяется как:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta_\eta(t)\|}{\|\delta(0)\|}$$

где $\lambda(\vec{X}_0, t) = \lim_{\|\delta(0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta_\eta(t)\|}{\|\delta(0)\|}$ - локальный показатель Ляпунова.

Глобальный показатель Ляпунова не зависит от $\vec{X}_0$ в силу эргодичности.

О предсказуемости атмосферы

Изучение предсказуемости атмосферы, то есть предсказуемости погоды и климата, имеет долгую историю. Самое раннее исследование динамической предсказуемости появилось в 1957 году, когда Томпсон впервые поднял вопрос о предсказуемости численного прогноза погоды. Предположим, в исходном поле существует ошибка, через некоторое время она увеличится вдвое, а затем будет становиться все больше и больше. Этот отрезок времени называется предсказуемостью.

Известно, что локальные показатели Ляпунова (*LE*) непосредственно связаны с предсказуемостью и ростом ошибок в определенные периоды, чем глобальные показатели Ляпунова.

При количественной оценке временной шкалы предсказуемости динамической системы в течение определенного периода времени используются время Ляпунова и время Колмогорова-Синая (время *KS*), которые определяются как обратные значения первого глобального *LE* и энтропии Колмогорова-Синая (энтропия *KS*), которые чаще всего использовались для оценки времени предсказуемости.

Я. Песин [1977] показал, что при некоторых условиях существует связь между энтропией *KS* области *V* фазового пространства и *LE*. Он показал, что

$$KS = \int_V \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\overrightarrow{X})\rho(\overrightarrow{X})d\overrightarrow{X}$$

Во многих случаях λi не зависят от X, так что это уравнение можно упростить до

$$KS = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

О верификации метеорологических прогнозов

Верификация метеорологических прогнозов необходима для контроля их точности, понимания их ошибок и совершенствования систем прогнозирования. В последние годы наблюдается растущий интерес к новым подходам верификации прогнозов, о чем свидетельствует рост числа публикаций о новых разработанных методах проверки.

Повышенное разрешение численных моделей создало потребность в новых и различных диагностических методах. Ансамблевое прогнозирование получило широкое распространение, что требует поиска новых способов оценки, а также вероятностных продуктов, которые могут быть получены на основе ансамблей

Прогнозирование экстремальных погодных явлений, хотя оно всегда представляло интерес, приобрело новое значение в свете лучшего понимания изменчивости погоды, что требует методов верификации, ориентированных на экстремальные и редкие явления.

Новые типы наблюдений дают возможность по-новому оценивать прогнозы моделей. Например, активное дистанционное зондирование облаков с помощью космических и наземных радиолокационных и лидарных измерений дает подробную информацию о вертикальных структурах облаков, которую можно использовать для структурной и статистической проверки моделей облаков. Существующие наблюдения, при условии тщательного контроля качества и согласования, теперь могут использоваться для более обширной и детальной проверки, чем это было возможно в прошлом.