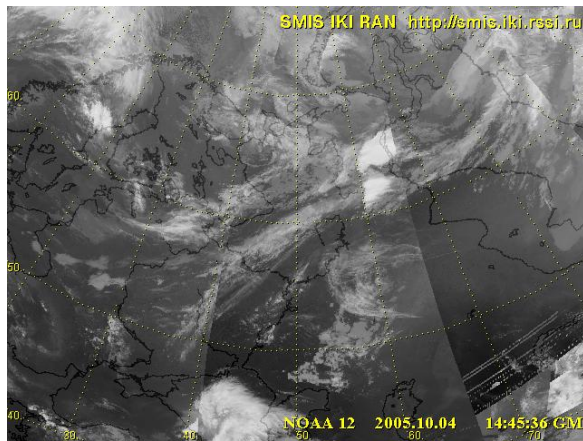




$$x_a = x_f + K(y_0 - Hx_f)$$

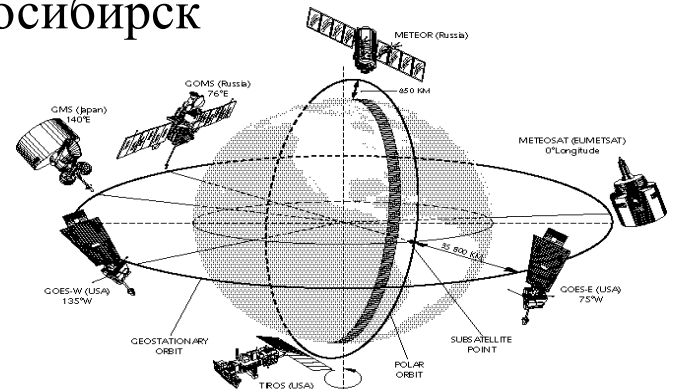
$$K = PH^T (HPH^T + R)^{-1}$$

*Методы усвоения данных наблюдений, основанные
на теории оптимальной фильтрации Калман»*

*Климова Екатерина Георгиевна,
д.ф.-м.н.,*

Институт вычислительных технологий СО РАН,
СибНИГМИ Росгидромета , Новосибирск

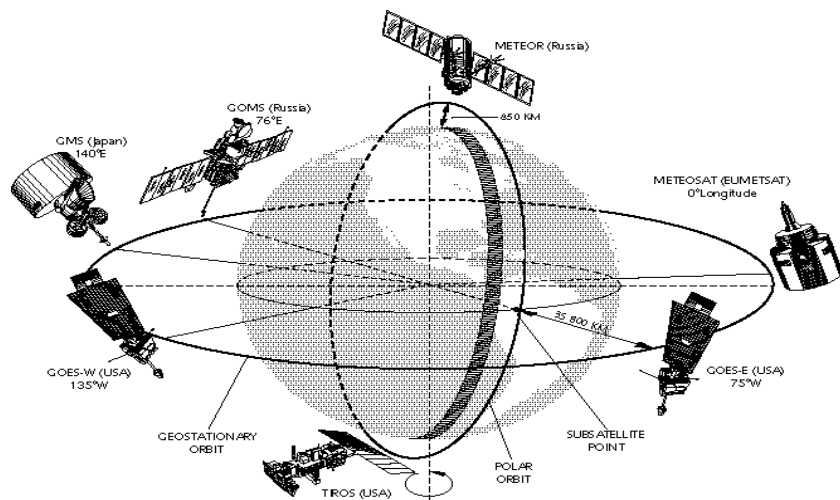
$$P = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$$



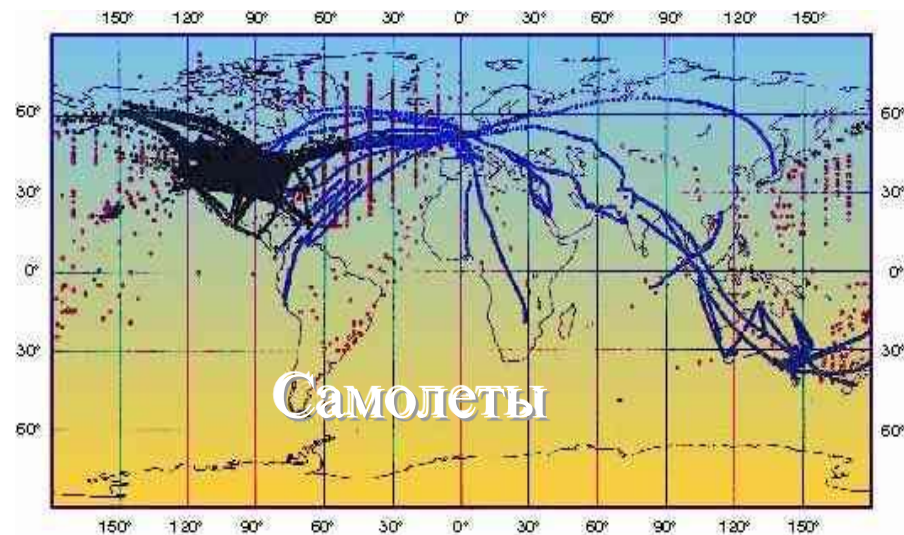
Содержание лекции

1. *Введение.*
2. *Постановка задачи оптимальной фильтрации.*
3. *Проблемы практической реализации фильтра Калмана.*
4. *Современные схемы усвоения данных, основанные на фильтре Калмана.*
5. *Заключительные выводы.*

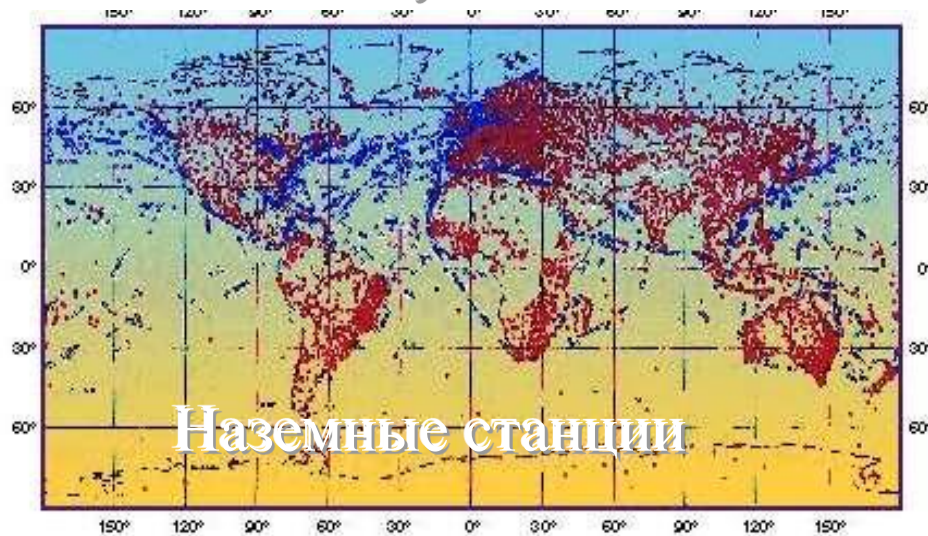
Наблюдательные системы



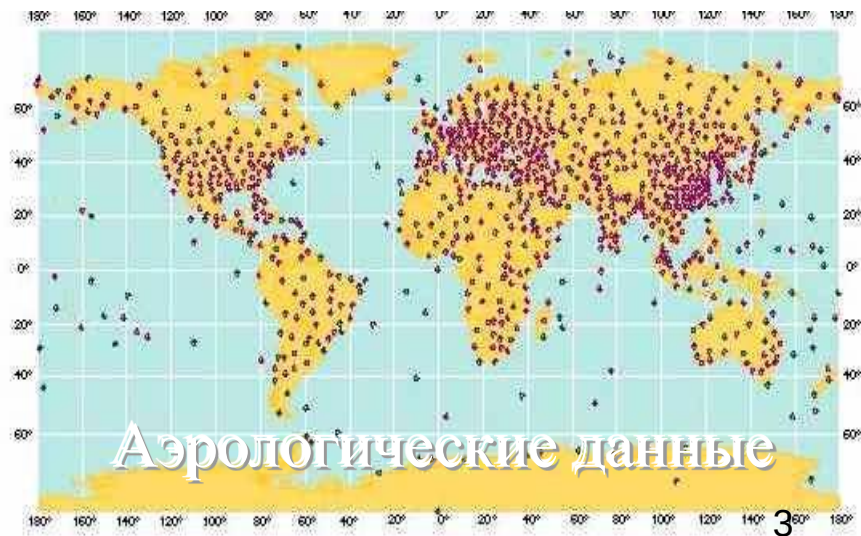
Спутники



Самолеты



Наземные станции



Аэрологические данные

Введение

- Под усвоением данных принято понимать задачу восстановления пространственно-временного распределения полей по данным наблюдений и математической модели, описывающей динамику полей по времени.
- Такие задачи в настоящее время рассматриваются для описания процессов в атмосфере, океане, а также распространения загрязняющих веществ в окружающей среде.
- Цель усвоения данных — как подготовка начальных полей для последующего прогноза, так и более общая — описание поведения по времени исследуемых полей, изучение климата и т.д.

Введение.

Известная информация:

- данные измерений;
- математические модели;
- «априорная информация».

Основные проблемы:

- необходимость работы с данными разных типов;
- многие переменные напрямую не измеряются;
- задача оценивания имеет огромную размерность (порядок оцениваемых векторов 10^7);
- математические модели атмосферных процессов нелинейны;
- наличие систематических ошибок модели и данных наблюдений.

Введение.

Проблема усвоения данных

*Математическая
постановка
задачи*

*Проблемы
практической
реализации*

*Работа с
данными
наблюдений*

Введение.

- Для решения задачи усвоения используются математические постановки задачи, при этом в мире в настоящее время развиваются два направления – вариационный (3DVAR-4DVAR) и динамико-стохастический (фильтр Калмана).
- Лекция посвящена динамико-стохастическому подходу к задаче усвоения. Постановка задачи усвоения рассматривается в общем виде, так, как это делается в теории оценивания.
- В лекции будут использованы определения и постановки задач из классической монографии **Jazwinsky A. Stochastic processes and filtering theory, Academic Press. 1970. 377 p** а также частично из **Справочника по теории автоматического управления под ред. А.А. Красовского, Москва, «Наука», 1987, 711 с.**

Введение.

Простой пример.

Пример взят из книги ***Kalnay E. 2003. Atmospheric Modelling, Data assimilation and predictability. Cambridge University Press, Cambridge , 341 pp.***

Пусть известно значение температуры из двух источников:

$$T_1 = T_b \quad - \text{прогноз}$$

$$T_2 = T_0 \quad - \text{наблюдения}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_b = T_t + \varepsilon_b \\ T_0 = T_t + \varepsilon_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Информация} \\ \text{известна с} \\ \text{ошибками} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} E(\varepsilon_b) = E(\varepsilon_0) = 0 \\ E(\varepsilon_b^2) = \sigma_b^2 \\ E(\varepsilon_0^2) = \sigma_0^2 \\ E(\varepsilon_0 \varepsilon_b) = 0 \end{array}$$

$$T_t \quad - \text{«истинное» значение}$$

Введение.

Простой пример.

Анализ :

$$T_a = T_b + w(T_0 - T_b)$$

*Весовые
коэффициенты
определяются
из условия:*

$$\sigma_a^2 : E[(T_a - T_t)^2] \rightarrow \min$$

*Оптимальные весовые
коэффициенты:*

$$w = \frac{\sigma_b^2}{(\sigma_b^2 + \sigma_0^2)}$$

*Оценка ошибки
анализа:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_a^2 = (\sigma_b^{-2} + \sigma_0^{-2})^{-1} \\ \sigma_a^2 = (1 - w)\sigma_b^2 \end{array} \right.$$

Введение.

Простой пример.

шаг прогноза: $T_b(t_{i+1}) = M[T_a(t_i)]$

«истина»: $T_t(t_i) = M[T_t(t_{i-1})] - \varepsilon_M$

ошибка модели: $\varepsilon_M \longrightarrow \begin{aligned} E(\varepsilon_M) &= 0 \\ E(\varepsilon_M^2) &= Q \end{aligned}$

$$\varepsilon_{b,i+1} = (T_b - T_t)_{i+1} = M(T_b)_i - M(T_t)_i + \varepsilon_M = \tilde{M}\varepsilon_{b,i} + \varepsilon_M$$

*Уравнение для
ошибки оценки:*

$$\sigma_{b,i+1}^2 = E(\varepsilon_{b,i+1}^2) = \tilde{M}^2 \sigma_{a,i}^2 + Q$$

$$\tilde{M} = \frac{\partial M}{\partial T}$$

Введение.

Простой пример.

Цикл усвоения:

данные

$$T_{0,i}, T_b(t_i)$$



анализ

$$T_a(t_i), \sigma_a^2(t_i)$$



прогноз

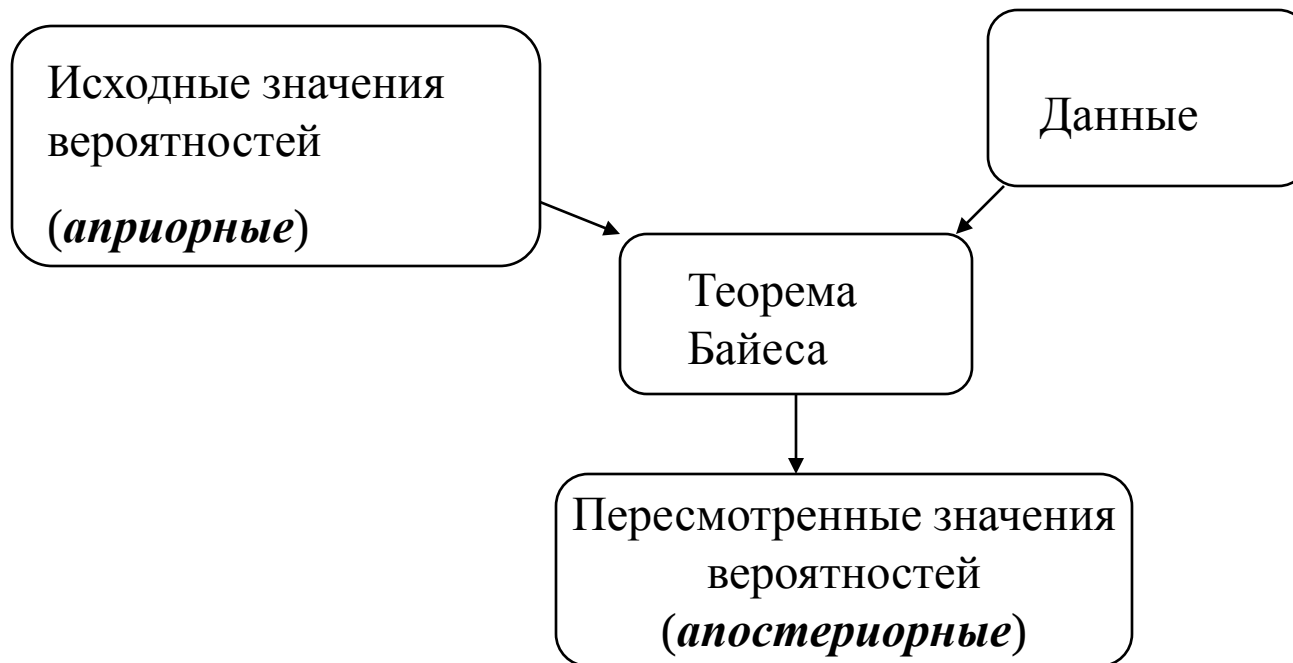
$$T_b(t_{i+1}), \sigma_b^2(t_{i+1})$$



Введение.

Байесовскими методами являются методы, разработанные в результате попыток сформулировать и решить статистические проблемы на основе теоремы Байеса.

Байесовский подход:



Постановка задачи оценивания.

Дискретная постановка.

Рассмотрим дискретную стохастическую динамическую систему:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, t_{k+1}, t_k) + \Gamma(x_k, t_k) \omega_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

φ - n -вектор, Γ - $n \times r$ матрица,

$\{\omega_k, k = 1, \dots\}$ - r -вектор, представляющий собой Гаусовский белый шум,

$$\omega_k \sim N(0, Q_k)$$

Предположим, что задано начальное распределение x_0 , которое не зависит от $\{\omega_k\}$

Постановка задачи оценивания.

Дискретная постановка.

Рассмотрим дискретный m -вектор наблюдений y_k

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k, k = 1, 2, \dots,$$

h - m - вектор-функция, $\{v_k, k = 1, \dots\}$ - m - вектор, Гауссовский белый шум,

$$v_k \sim N(0, R_k), R_k > 0$$

Предположим, что $\{\omega_k\}$ и $\{v_k\}$ независимы.

Пусть $Y_l = \{y_1, \dots, y_l\}$ - последовательность наблюдений.

Постановка задачи оценивания.

Дискретная постановка.

Дискретная проблема оценивания состоит в вычислении оценки X_k по данным Y_l .

Если $k < l$ – это проблема **дискретного сглаживания**,
если $k = l$ – **дискретной фильтрации**,
 $k > l$ – **дискретного прогноза**.

Постановка задачи оценивания.

- Решением задачи фильтрации является условная плотность распределения вероятностей функции X_t при заданном Y_t : $p(x, t | Y_t)$ поскольку она содержит всю статистическую информацию о X_t .
- В линейном случае условная плотность распределения вероятностей является Гауссовской и полностью описывается средним вектором и матрицей ковариаций.

Решение задачи оценивания.

1. Задача фильтрации полностью описывается условной плотностью распределения $p(x, t | Y_\tau)$.
2. Если условная плотность распределения симметрична относительно среднего и унимодальна, то оптимальным решением является условное среднее.
3. В общем случае для решения задачи получают уравнения для условного среднего и условной плотности распределения вероятностей.
4. В линейном случае достаточно описания поведения условного среднего и матрицы ковариаций

$$P_t^\tau = E\{(x_t - \hat{x}_t^\tau)(x_t - \hat{x}_t^\tau)^T | Y_\tau\}$$

Т.к. $E\{(x_t - \hat{x}_t^\tau)^T (x_t - \hat{x}_t^\tau)\} = \text{tr} P_t^\tau$, то ковариационная матрица содержит информацию об ошибке оценивания.

Решение задачи фильтрации.

Линейная теория фильтрации.

Дискретная линейная система описывается уравнением

$$x_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k)x_k + \Gamma(t_k)\omega_{k+1}, k = 0, 1, \dots$$

x_k - n -вектор состояния в момент времени t_k , Γ - $n \times r$, $\{\omega_k, k = 1, \dots\}$

r - вектор, представляющий собой Гауссовский белый шум, $\omega_k \sim N(0, Q_k)$.

Предположим, что задано начальное распределение x_0 ,
которое не зависит от $\{\omega_k\}$.

Дискретный m -вектор наблюдений y_k :

$$y_k = H(t_k)x_k + v_k, k = 1, 2, \dots,$$

$\{v_k, k = 1, \dots\}$ m – вектор, Гауссовский белый шум, $v_k \sim N(0, R_k)$, $R_k > 0$.

Предположим, что x_0 , $\{\omega_k\}$ и $\{v_k\}$ независимы.

Решение задачи фильтрации.

Линейная теория фильтрации.

Теорема. Оптимальный фильтр для линейной системы состоит из уравнений для условного среднего и матрицы ковариаций.

Между наблюдениями

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1}^k &= \Phi(t_{k+1}, t_k) \hat{x}_k^k, \\ P_{k+1}^k &= \Phi(t_{k+1}, t_k) P_k^k \Phi^T(t_{k+1}, t_k) + \Gamma(t_k) Q_{k+1} \Gamma^T(t_k).\end{aligned}$$

Обозначения

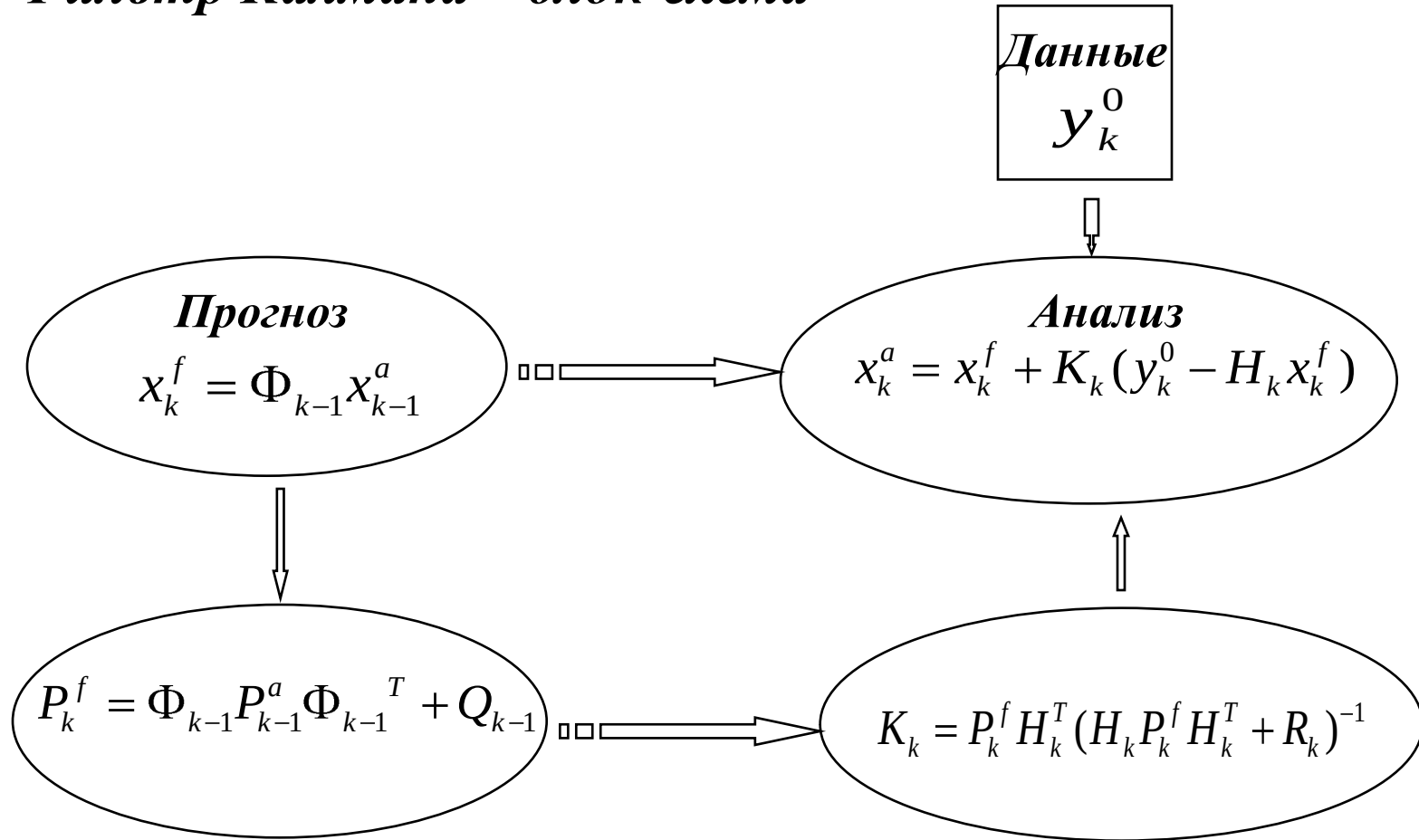
$$\begin{aligned}\hat{x}_k^k &= E\{x_k | Y_k\} \\ \hat{x}_{k+1}^k &= E\{x_{k+1} | Y_k\} \\ P_k^k &= E\{(x_k - \hat{x}_k^k)(x_k - \hat{x}_k^k)^T | Y_k\} \\ P_{k+1}^k &= E\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^k)(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^k)^T | Y_k\}\end{aligned}$$

В точках наблюдений

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^k &= \hat{x}_k^{k-1} + K(t_k)(y_k - H(t_k)\hat{x}_k^{k-1}), \\ P_k^k &= P_k^{k-1} - K(t_k)H(t_k)P_k^{k-1}, \\ K(t_k) &= P_k^{k-1}H^T(t_k)(H(t_k)P_k^{k-1}H^T(t_k) + R_k)^{-1}.\end{aligned}$$

Проблемы практической реализации.

Фильтр Калмана – блок-схема



Проблемы практической реализации.

Фильтр Калмана – анализ данных.

$$x_a = x_f + K(y_0 - Hx_f),$$

$$K = PM^T (HPH^T + R)^{-1},$$

$$y_0 = Hx_f + \varepsilon_0,$$

Проблемы практической реализации.

Проблемы нелинейности операторов.

Подходы к решению проблемы нелинейности:

а) Обобщенный фильтр Калмана.

Теорема. Обобщенный фильтр Калмана для нелинейной системы состоит из уравнений

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_k) = \hat{x}(t_k | t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{x}(t_k | t_k)) dt,$$

$$P(t_{k+1} | t_k) = \Phi[t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k | t_k)] P(t_k | t_k) \Phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k | t_k)] + Q(t_{k+1}).$$

В точках наблюдений

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)] \times [y_{t_{k+1}} - h(\hat{x}(t_{k+1} | t_k), t_{k+1})],$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K\{t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)\} H\{t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)\}] P(t_{k+1} | t_k),$$

$$K[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)] = P(t_{k+1} | t_k) H^T[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)] \times$$

$$\times [H\{t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)\} P(t_{k+1} | t_k) H^T\{t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1} | t_k)\} + R(k+1)]^{-1}.$$

Проблемы практической реализации.

Проблемы нелинейности операторов.

В этих формулах

$$y_{t_k} = h(x_{t_k}, t_k) + v_k; \quad H[t_k; \bar{x}(t_k)] = \left[\frac{\partial h_i(\bar{x}(t_k), t_k)}{\partial x_j} \right],$$

Φ - разрешающий оператор линеаризованной системы уравнений

$$x_{t_{k+1}} = \Phi(t_{k+1}, t_k) x_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) d\beta_\tau, \quad F[t, \bar{x}(t_0)] = \left[\frac{\partial f_i(\bar{x}(t), t)}{\partial x_j} \right]$$

$$d\Phi(t, \tau) / dt = F(t) \Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$

$$\hat{x}(t_k | t_k) = E\{x(t_k) | Y_k\}$$

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_k) = E\{x(t_{k+1}) | Y_k\}$$

$$P(t_k | t_k) = E\{(x(t_k) - \hat{x}(t_k | t_k))(x(t_k) - \hat{x}(t_k | t_k))^T | Y_k\}$$

$$P(t_{k+1} | t_k) = E\{(x(t_{k+1}) - \hat{x}(t_{k+1} | t_k))(x(t_{k+1}) - \hat{x}(t_{k+1} | t_k))^T | Y_k\}$$

Проблемы практической реализации.

Проблемы нелинейности операторов.

Подходы к решению проблемы нелинейности:

б). Разложение в ряд относительно $\hat{x}$ - фильтр 2-го порядка.

в). Замена среднего по множеству средним по ансамблю (ансамблевый фильтр Калмана).

Проблемы практической реализации.

Проблемы нелинейности операторов. Фильтр 2-го порядка.

Пример фильтра 2-го порядка для дискретно-непрерывной постановки задачи фильтрации (в одномерном случае):

$$f(x, t) = f(\hat{x}, t) + f_x(\hat{x}, t)(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} f_{xx}(\hat{x}, t)(x - \hat{x})^2 + \dots$$

$$\frac{d\hat{x}_t}{dt} = f(\hat{x}_t, t) + \frac{1}{2} P_t f_{xx}(\hat{x}_t, t),$$

$$\frac{dP_t}{dt} = 2P_t f_x(\hat{x}_t, t) + g^2 Q$$

Проблемы практической реализации.

Ансамблевый подход.

Ансамблевый подход состоит в следующем:

По ансамблю начальных данных осуществляется N прогнозов.

$$x_i^f = F[x_i^a(t-1)] + q_i, \quad i = 1, \dots, N$$
$$q_i \sim N(0, Q)$$

Задается ансамбль данных наблюдений и вычисляется ансамбль анализов.

$$y_i^0 = y^0 + r_i, \quad i = 1, \dots, N$$
$$r_i \sim N(0, R)$$
$$x_i^a = x_i^f + K(y_i^0 - Hx_i^f), \quad i = 1, \dots, N$$
$$K = P^f H^T (HP^f H^T + R)^{-1}$$

Проблемы практической реализации.

Ансамблевый подход.

Матрица P оценивается по формуле:

$$P^f H^T = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i^f - \bar{x}_i^f)(Hx_i^f - H\bar{x}_i^f)^T,$$
$$HP^f H^T = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Hx_i^f - H\bar{x}_i^f)(Hx_i^f - H\bar{x}_i^f)^T.$$

Заметим, что

- при оценке матрицы предполагается, что отклонение от среднего ведет себя как отклонение от «истины»;
- ранг матрицы P , оцененной по ансамблю, равен числу членов ансамбля.

Проблемы практической реализации.

Ансамблевый подход.

Основные проблемы реализации ансамблевого фильтра Калмана:

1. генерирование ансамбля начальных полей с заданными свойствами;
2. из-за ограниченного числа членов ансамбля возникает проблема описания всего пространства состояний модели, поэтому в ряде работ ансамблевый фильтр Калмана предлагается реализовывать локально;
3. при реализации ансамблевого фильтра Калмана локально остаются проблемы рассогласованности на границах подобластей и нарушения баланса между анализируемыми переменными;

Проблемы практической реализации.

Ансамблевый подход.

3. на больших расстояниях возникают «ложные ковариации», которые необходимо подавлять;
4. ансамблевый фильтр Калмана не решает проблемы нелинейности. На шаге прогноза вычисляется оценка P по нелинейной модели, а шаг анализа соответствует линейной оценке состояния по данным наблюдений; ансамблевый фильтр Калмана не имеет фундаментального теоретического обоснования для нелинейной динамической системы с негауссовской статистикой.

Проблемы практической реализации.

Проблема высокой размерности вектора наблюдений.

В случае если вектор данных можно разбить на подвекторы

$$y_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1}^1 \\ \vdots \\ y_{k+1}^l \end{bmatrix}$$

и при этом ковариационная матрица ошибок наблюдений блочно-диагональная

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_l \end{bmatrix}$$

то алгоритм фильтра Калмана может быть реализован за l шагов, при этом на каждом шаге будут использоваться данные из l -го блока.

Проблемы практической реализации.

Проблемы большой размерности вектора динамической системы:

- а). субоптимальные алгоритмы;
- б). локальные алгоритмы;
- в). ансамблевый подход.

Проблемы практической реализации.

Проблема «расходимости» алгоритма.

В случае $Q=0$ либо малых значений Q со временем элементы матрицы $P \rightarrow 0$ и данные наблюдений входят все с меньшим весом. Поэтому существует отдельная проблема задания матрицы Q , а также оценивания ее элементов на основе адаптивных алгоритмов.

Для расчета матрицы P^a предпочтительнее использовать более устойчивую по отношению к ошибкам округления формулу

$$P^a = (I - KH)P^f (I - KH)^T + KRK^T$$

Современные схемы усвоения данных, основанные на фильтре Калмана

Фильтр Калмана:

$$x_k^f = \Phi_{k-1} x_{k-1}^a;$$

$$P_k^f = \Phi_{k-1} P_{k-1}^a \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1};$$

$$K_k = P_k^f H_k^T (H_k P_k^f H_k^T + R_k)^{-1};$$

$$P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f;$$

$$x_k^a = x_k^f + K_k (y_k^0 - H_k x_k^f);$$

$$k = 0, \dots, K.$$

$$P_k^f = E(x_k^f - x_k^t)(x_k^f - x_k^t)^T; P_k^a = E(x_k^a - x_k^t)(x_k^a - x_k^t)^T.$$

Обобщенный фильтр Калмана

Extended Kalman filter - EKF

Пусть уравнение модели имеет вид $x_{k+1} = \Phi_k(x_k)$

Алгоритм обобщенного фильтра Калмана может быть записан в следующем виде:

$$x_{k+1} = \Phi_k(x_k) + \xi_k + P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_0 - H(\Phi_k(x_k))),$$

$$P_{k+1} = \hat{P}_{k+1} - \hat{P}_{k+1} H_{k+1}^T (H_{k+1} \hat{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} H_{k+1} \hat{P}_{k+1},$$

$$\hat{P}_{k+1} = \tilde{\Phi} \hat{P}_k \tilde{\Phi}^T + Q_k,$$

Где P_{k+1} - матрица ковариаций ошибок оценивания,

$x_0 = \hat{x}$, $P_0 = \hat{P}$, $\tilde{\Phi}_k$ - оператор, линеаризованный относительно предыдущего шага по времени,

R_{k+1}, Q_k - матрицы ковариаций ошибок наблюдений и «шумов модели» ξ_k 34

Ensemble Kalman filter - EnKF

(Evensen, 1994; Mitchell, Houtekamer, 1998)

Ансамбль начальных полей и прогнозов:	{	$x_f^{0(i)} = \hat{x} + \Delta x_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N$
Оценка ковариационн ых матриц:	{	$x_{k+1}^{f(i)} = \Phi_k(x_k^{a(i)}) + \xi_k^{(i)},$ $P_k^f H_k^T = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_k^{f(i)} - \overline{x_k^{f(i)}})(H_k x_k^{f(i)} - \overline{H_k x_k^{f(i)}})^T,$ $H_k P_k^f H_k^T = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (H_k x_k^{f(i)} - \overline{H_k x_k^{f(i)}})(H_k x_k^{f(i)} - \overline{H_k x_k^{f(i)}})^T,$
Ансамбль «анализов»:	{	$K_k = P_k^f H_k^T (H_k P_k^f H_k^T + R_k)^{-1},$ $x_k^{a(i)} = x_k^{f(i)} + K_k (y_k^{0(i)} - H_k x_k^{f(i)}),$ $y_k^{0(i)} = y_k^0 + r_k^{(i)}$

$$\overline{x_{k+1}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{k+1}^{(i)}$$

Ensemble Square Root Filter- EnSRF

(Whitaker, Hamill, 2002)

- «Возмущенные» наблюдения увеличивают ошибку EnKF, связанную с малым количеством элементов ансамбля.
- Предлагается алгоритм, в котором не требуется задания «возмущенных» наблюдений.

$$\delta y_o^i = 0 \rightarrow P^a = (I - KH)P^f (I - KH)^T \neq (I - KH)P^f$$

**Основная
идея EnSRF:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K} : (I - \tilde{K}H)P^f (I - \tilde{K}H)^T = (I - \tilde{K}H)P^f \\ \downarrow \\ \tilde{K} = P^f H^T \left[\sqrt{HP^f H^T + R} \right]^{-1} \times \\ \times \left[\sqrt{(HP^f H^T + R)} + \sqrt{R} \right]^{-1} \end{array} \right.$$

Ensemble Square Root Filter- EnSRF

(Whitaker, Hamill, 2002)

- В случае одного наблюдения $HP^f H^T$ и R - скаляры.
- Предположим, что $\tilde{K} = \alpha K$.
- Тогда

$$\frac{HP^f H^T}{HP^f H^T + R} \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \rightarrow \alpha = \left(1 + \sqrt{\frac{R}{HP^f H^T}} \right)^{-1}$$

Ensemble Transform Kalman Filter - ETKF

(Bishop et al, 2001)

- Ковариационная матрица P^f преобразуется в матрицу P^a с помощью «матрицы трансформации» T .
- Все операции осуществляются с матрицами размерности N (количество элементов ансамбля).

Local Ensemble Transform Kalman Filter- LETKF (Hunt et al, 2007)

- Объединение идей *Ensemble Transform Kalman Filter* и *Local Ensemble Kalman Filter* (анализ проводится локально в подобластях).
- Анализ может проводиться для каждого узла сетки независимо.
- Анализ проводится только для «среднего» значения.
- Вычисляется ансамбль анализов, соответствующий матрице ковариаций ошибок анализа.

Local Ensemble Transform Kalman Filter- LETKF (Hunt et al, 2007)

$$X^a = \{x^{a(i)} - \overline{x^{a(i)}}\}$$

- ансамбли анализов и прогнозов.

$$X^f = \{x^{f(i)} - \overline{x^{f(i)}}\}$$

Формулы LETKF:
 ρ - “inflation factor”.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \tilde{P}^a = \left[(k-1)I / \rho + (Y^f)^T R^{-1} Y^f \right]^{-1}, Y^f = H X^f \\ 2) W^a = \left[(k-1) \tilde{P}^a \right]^{1/2} \\ 3) \bar{w}^a = \tilde{P}^a C (y_o - H \bar{x}^f), C = (Y^f)^T R^{-1} \\ 4) x^{a(i)} = \bar{x}^f + X^f w^{a(i)}, w^{a(i)} - i - \text{й столбец } W \\ 5) \bar{x}^a = \bar{x}^f + X^f \bar{w}^a \quad 6) P^a = X^f \tilde{P}^a X^{f^T} \end{array} \right.$$

Local Ensemble Transform Kalman Filter- LETKF

(Hunt et al, 2007)

Проблемы реализации:

Оценка “inflation factor” (Kalnay et al).

$$\tilde{P}^a = \left[(k-1)I / \rho + (Y^f)^T R^{-1} Y^f \right]^{-1}, Y^f = H X^f$$

«Локализация»:

$$x_a^k = x_f^k + K_k (y_0 - H x_f)$$

$$K_k = P H^T (H P H^T + R \circ \varphi(r_{ik}))^{-1}$$

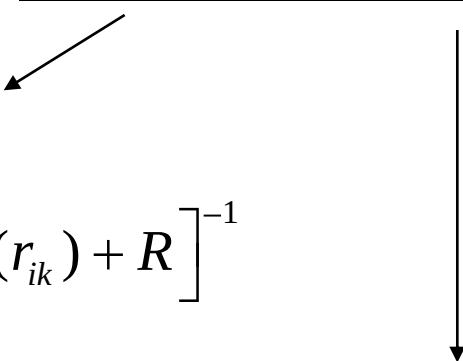
Ensemble Kalman Filter - EnKF

Проблемы реализации:

«Локализация»:

$$x_a = x_f + K(y_0 - Hx_f)$$

$$K = PH^T (HPH^T + R)^{-1}$$


$$x_a = x_f + K(y_0 - Hx_f)$$

$$K = PH^T \circ \varphi(r_{ik}) \left[HPH^T \circ \varphi(r_{ik}) + R \right]^{-1}$$

$$x_a = x_f + K(y_0 - Hx_f)$$

$$K = P \circ \varphi(r_{ik}) H^T \left[H P \circ \varphi(r_{ik}) H^T + R \right]^{-1}$$

Итерационный алгоритм (Jazwinsky, 1970)

Итерационный обобщенный фильтр Калмана: оценка в момент наблюдений осуществляется итерационно:

$$\begin{aligned}\eta_{i+1} &= \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1}; \eta_i) [y_{k+1} - h(\eta_i, t_{k+1}) - H(t_{k+1}; \eta_i) \\ &\times \{\hat{x}(t_{k+1} | t_k) - \eta_i\}], i = 1, \dots, l, \\ \hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \eta_l\end{aligned}$$

Итерации начинаются с $\eta_1 = \hat{x}(t_{k+1} | t_k)$ и заканчиваются, когда разность между итерациями станет маленькой.

Такой итерационный процесс решает проблему нелинейности оператора наблюдений, но не решает проблему нелинейности оператора модели.

Во втором случае предлагается итерационный линейный фильтр-сглаживатель (Jazwinsky, 1970)

Iterative Ensemble Kalman Filter - IEnKF

(Sakov et al, 2012)

Рассматривается промежуток времени между
двумя наблюдениями:

$$t_1 \text{ ————— } t_2$$

$$x_2 = \Phi_{12}(x_1)$$

$$x_1 : \min \{ (x_1 - x_1^0)^T (P_1^0)^{-1} (x_1 - x_1^0) + [y_2 - H_2(x_2)]^T (R_2)^{-1} [y_2 - H_2(x_2)] \}$$

↓

$$(P_1^0)^{-1} (x_1 - x_1^0) - \{ \nabla_{x_1} H_2[\Phi_{12}(x_1)] \}^T (R_2)^{-1} \{ y_2 - H_2[\Phi_{12}(x_1)] \} = 0$$

Iterative Ensemble Kalman Filter - IEnKF

(Sakov et al, 2012)

Решение ищется с помощью итерационного алгоритма:

$$\begin{aligned}x_1^{i+1} &= x_1^i + \mathbf{P}_1^{i+1} \mathbf{H}_2^i \Phi_{12}^{i T} (\mathbf{R}_2)^{-1} \{y_2 - H_2[\Phi_{12}(x_1^i)]\} + \\&+ \mathbf{P}_1^{i+1} (\mathbf{P}_1^0)^{-1} (x_1^0 - x_1^i) \\ \mathbf{P}_1^{i+1} &= [(\mathbf{P}_1^0)^{-1} + \mathbf{H}_2^i \Phi_{12}^{i T} (\mathbf{R}_2)^{-1} \mathbf{H}_2^i \Phi_{12}^i]^{-1}\end{aligned}$$

Где Φ_{12}^i и $\mathbf{H}_2^i$ - линеаризованные относительно предыдущей итерации операторы.

Для вычисления ковариационных матриц используется ансамблевый подход.

Оценка параметров в алгоритмах усвоения данных, основанных на фильтре Калмана

Шаг прогноза:

$$\mathbf{x}_f^{n+1} = \Phi(\mathbf{x}_f^n) + \mathbf{b}_f^n$$

$$\mathbf{b}_f^{n+1} = B(\mathbf{b}_f^n)$$

Шаг анализа:

$$\mathbf{x}_a^n = \mathbf{x}_f^n + \mathbf{P}_{xx} (\mathbf{H} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{H} \mathbf{x}_f^n)$$

$$\mathbf{b}_a^n = \mathbf{b}_f^n + \mathbf{P}_{xb} (\mathbf{H} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{H} \mathbf{x}_f^n)$$

$\mathbf{x}_f^n, \mathbf{x}_a^n$ - прогнозируемые переменные; $\mathbf{b}_f^n, \mathbf{b}_a^n$ - оцениваемые параметры.

Заключительные выводы.

1. Проблемы, возникающие при практической реализации фильтра Калмана в задачах усвоения данных:

- Проблема высокой размерности вектора наблюдений.
- Проблемы большой размерности вектора динамической системы
- Проблема «расходимости» алгоритма.
- Проблемы нелинейности операторов динамической системы и наблюдений.

Заключительные выводы.

2. Основные проблемы реализации ансамблевого фильтра Калмана:

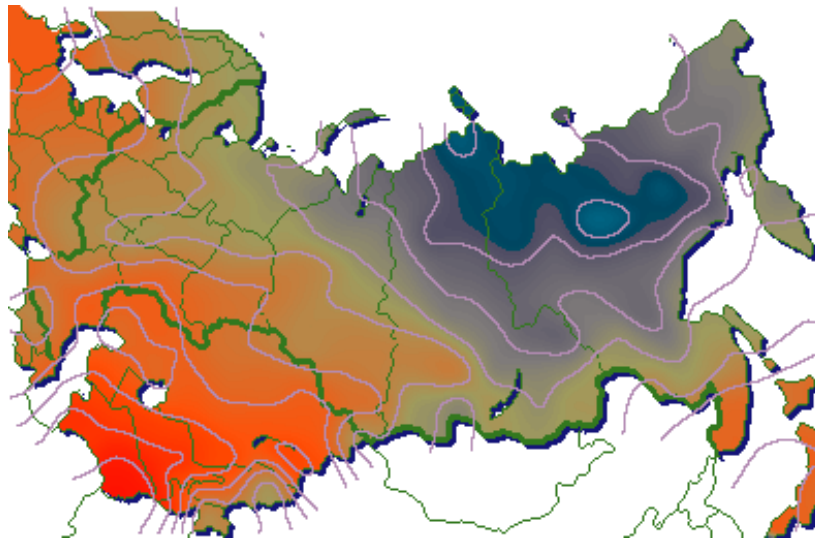
- генерирование ансамбля начальных полей с заданными свойствами;
- из-за ограниченного числа членов ансамбля возникает проблема описания всего пространства состояний модели, поэтому в ряде работ ансамблевый фильтр Калмана предлагается реализовывать локально;
- при реализации ансамблевого фильтра Калмана локально остаются проблемы рассогласованности на границах подобластей и нарушения баланса между анализируемыми переменными;

Заключительные выводы.

2. Основные проблемы реализации ансамблевого фильтра Калмана:

- на больших расстояниях возникают «ложные ковариации», которые необходимо подавлять;
- ансамблевый фильтр Калмана не решает проблемы нелинейности. На шаге прогноза вычисляется оценка P по нелинейной модели, а шаг анализа соответствует линейной оценке состояния по данным наблюдений;
- ансамблевый фильтр Калмана не имеет фундаментального теоретического обоснования для нелинейной динамической системы с негауссовской статистикой.

Спасибо за внимание!



$$\frac{d\hat{x}_t^t}{dt} = \hat{f}^t(x_t, t),$$

$$\frac{dP_t^t}{dt} = (E^t\{x_t f^T\} - \hat{x}_t^t \hat{f}^{t^T}) + (E^t\{f x_t^T\} - \hat{f}^T \hat{x}_t^{t^T}) + E^t\{G Q G^T\}.$$