

О существовании стационарной меры
для стохастической системы
квазисолеиодальной модели
бароклинной атмосферы,
возмущенной белым шумом

к.ф.-м.н. Клевцова Юлия Юрьевна
ФБГУ «СибНИГМИ», Новосибирск
yy_klevtsova@ngs.ru

Фундаментальная проблема

Исследовать вопрос о

- существовании единственной стационарной меры
 - сходимости к ней произвольной начальной меры при $t \rightarrow +\infty$
 - указать скорость этой сходимости
- для уравнений климатических моделей, при условии добавления в правую часть малого случайного шума.

Современное состояние исследований

Фамилии исследователей (46) (1991-2012), которые доказали факты из фундаментальной проблемы для разнообразных уравнений математической физики, возмущенных некоторым случайным шумом:

Bakhtin Yu., Barton-Smith M., Blömker D.,
Bricmont J., Chueshov I., Da Prato G., Debussche A.,
Dong Zh., Du A., Duan J., E W., Eckmann J.-P., Ferrario B.,
Fischer M., Flandoli F., Fursikov A. V., Gao H., Goldys B.,
Hairer M., Khanin K., Kuksin S., Kupiainen A., Lefevere R.,
Liu D., Maslowski B., Masmoudi N., Mattingly J. C.,
Mazel A., Mueller C., Odasso C., Özgökmen T., Pardoux E.,
Piatnitski A., Romito M., Saussereau B., Schmalfuss B.,
Seidler J., Shirikyan A., Sinai Ya., Stoica I. L., Sun J.,
Wang W., Xu L., Young L.-S., Zabczyk J., Zhang X. —
Австралия, Великобритания, Германия, Италия, Китай,
Россия, Румыния, США, Украина, Финляндия, Франция,
Чехия, Швейцария.

Рассматривались следующие уравнения:

Уравнение теплопроводности:

$$\dot{u} - \nu u_{xx} = -\alpha u, \quad \nu > 0, \alpha \geq 0.$$

Уравнение реакции-диффузии:

$$\dot{u} - \nu \Delta u = -u^3.$$

Уравнение Шредингера:

$$\dot{u} - i\Delta u = i|u|^2 u - \alpha u, \quad \alpha > 0.$$

Уравнение Гинзбурга-Ландау:

$$\dot{u} - (\nu + i\alpha)\Delta u = -i\beta|u|^{2\sigma} u, \quad \nu > 0, \alpha > 0, \beta \geq 0, \sigma \geq 0.$$

Уравнение Бюргерса:

$$\dot{u} - \nu u_{xx} = -u_x u, \quad \nu > 0.$$

Уравнение Осеена:

$$\dot{u} - \Delta u = -(a \cdot \nabla)u - (u, \nabla)a - \nabla p \quad \operatorname{div} u = 0.$$

Уравнение Навье-Стокса :

$$\dot{u} - \nu \Delta u + (u, \nabla)u - \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0.$$

Уравнение квазигеострофического вихря :

$$\Delta \dot{u} - \nu \Delta^2 u + J(u, \Delta u) + \alpha \Delta u + \beta u_x = 0, \nu > 0, \alpha > 0, \beta \geq 0,$$

$$J(u, v) = u_x v_y - u_y v_x.$$

Уравнение Свифта-Хохенберга:

$$\dot{u} + \Delta^2 u = -2\Delta u + \alpha u - u^3, \quad \alpha \geq -1.$$

Уравнение Курамото-Сивашинского:

$$\dot{u} + \Delta^2 u = -\Delta u - u \nabla u.$$

Уравнение model in surface growth:

$$\dot{u} + u_{xxxx} = (u_x)_{xx}^2.$$

История вопроса для уравнений, связанных с климатом

- (1994–2012) двумерные и трехмерные уравнения вязкой несжимаемой жидкости (Bricmont J., Chueshov I., Ferrario B., Flandoli F., Hairer M., Kuksin S., Kupiainen A., Lefevere R., Maslowski B., Masmoudi N., Mattingly J., Odasso C., Piatnitski A., Romito M., Shirikyan A., Young L.-S.).

Для **двумерных уравнений** было доказано при условии добавления в правую часть некоторого случайного шума

- существование единственной стационарной меры,
- сходимость к ней произвольной начальной меры при $t \rightarrow +\infty$,
- указывается скорость сходимости.

Для тонкого 3-х мерного слоя, некоторые аналоги этих результатов также были получены.

История вопроса

- (2001) Duan J., Goldys B., двумерное уравнение квазигеострофического вихря с добавленным в правую часть белым шумом по t — доказано
 - существование единственной стационарной меры,
 - сходимость к ней произвольной начальной меры при $t \rightarrow +\infty$.
- (2002) Duan J., Gao H., Schmalfuss B.,
(2006) Du A., Duan J., Gao H., Özgökmen T.,-
малокомпонентные совместные модели,
включающие атмосферу и океан.
Добавляем в правую часть белый шум по t —
доказано существование единственной стационарной меры.

Фундаментальная проблема

Исследовать вопрос о

- существовании единственной стационарной меры
- сходимости к ней произвольной начальной меры при $t \rightarrow +\infty$
- указать скорость этой сходимости

для уравнений климатических моделей.

Конкретная задача

Доказать эти факты для двухслойной квазисоле-
ноидальной модели Лоренца бароклинной атмосферы.

Этапы исследования

- Получить достаточные условия существования единственного решения задачи Коши для системы модели Лоренца, возмущенной белым шумом по t .
- Доказать существование стационарной меры
- Доказать единственность стационарной меры, сходимост к ней произвольной начальной меры при $t \rightarrow +\infty$.
- Оценить скорость сходимости произвольной начальной меры к стационарной мере при $t \rightarrow +\infty$.

В работе [1] рассматривалась на единичной двумерной сфере S с центром в нуле в сферической системе координат

$$(\lambda, \varphi), \quad \lambda \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mu = \sin \varphi,$$

следующая система уравнений квазисоленоидальной модели Лоренца бароклинной атмосферы

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\nu > 0$ — вязкость, $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$ — неизвестное векторное поле, $g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x))^T$ — детерминированная внешняя сила, $x = (\lambda, \mu)$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k\Delta & 2k\Delta \\ k\Delta & -(2k + k_1 + \nu\gamma)\Delta + 2\gamma h \end{pmatrix},$$

$$B(u) = (J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2), J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2))^T,$$

здесь параметры $\gamma, h, k, k_1 \geq 0$, операторы Якоби $J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$ и Лапласа – Бельтрами $\Delta \psi = ((1 - \mu^2) \psi_\mu)_\mu + (1 - \mu^2)^{-1} \psi_{\lambda\lambda}$ на сфере S . В [1] было доказано, что существует единственное решение задачи Коши для системы уравнений (1) в некоторых функциональных пространствах.

- [1] KRUPCHATNIKOV V. N. *Global attractors for the Lorenz model on the sphere* // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Model. in Atmosph., etc.1995. Vol. 2. P. 31–40.

В настоящей работе рассматривается в качестве правой части системы (1) случайное векторное поле

$$g = f + \eta, \quad (2)$$

где внешняя сила $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ не зависит от t и случайное векторное поле $\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^T$, ω – случайный параметр, является белым шумом по t .

Были получены следующие результаты.

I. Для системы (1) с правой частью вида (2) доказано в [2] существование единственного решения задачи Коши со случайными начальными данными в некоторых функциональных пространствах при всех числовых параметрах $\nu > 0$, $\gamma, h, k, k_1 \geq 0$.

- [2] КЛЕВЦОВА Ю. Ю. *О корректности задачи Коши для стохастической системы модели Лоренца бароклинной атмосферы* // Матем. сб. 2012. Т. 203, №10. С. 117-144.
<http://www.sibnigmi.ru/documents/Klev.pdf>

II. В условиях, при которых был получен I результат, было доказано, что если дополнительно выполнено неравенство на числовые параметры h, k, k_1 для системы (1)

$$k \leq \min \{4k_1, 8h\}, \quad (3)$$

то существует стационарная мера для системы (1). Замечу, что диапазон изменения величины k (неравенство (3)) может быть несколько расширен, для наглядности приведено более жесткое ограничение на k , но проще выглядящее.

В дальнейшем планируется провести исследование вопроса о единственности стационарной меры и получении оценки скорости сходимости произвольной начальной меры к такой стационарной мере при $t \rightarrow +\infty$.