

**О ЗАВИСИМОСТИ МАКСИМУМОВ ЧИСЕЛ ВОЛЬФА
ОТ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ
ДВИЖЕНИЯ СОЛНЦА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА
ИНЕРЦИИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ**

Н.Н. Завалишин

*ГУ «Сибирский региональный научно-исследовательский
гидрометеорологический институт», г. Новосибирск*

**ON THE DEPENDENCE BETWEEN WOLF-NUMBER MAXIMA AND
THE SUN TRAJECTORY CURVATURE AND TORSION RELATIVE TO
THE SOLAR SYSTEM'S CENTER OF INERTIA**

Zavalishin N.N.

Рассматривается траектория движения Солнца относительно центра инерции Солнечной системы. Сделан переход в подвижную с Солнцем систему координат, определяемую репером Френе. Изложен алгоритм вычисления и найдены значения на интервале 1701—2050 гг. параметров вектора Дарбу по 5-точечной схеме. Показано, что в 24 случаях из 28 года максимальных значений чисел Вольфа находятся рядом с годами экстремумов в суммах аномалий кручения и кривизны траектории Солнца.

The trajectory of the Sun path relative to the center of inertia of the Solar system was discussed. A transition to coordinate system co-moving with the Sun, namely the Frenet frame, was performed. Calculation algorithm was presented, and values at the 1701—2050 interval of the Darboux vector parameters according to 5—point scheme were read off. Years with Wolf-number maxima were shown to be close to years with extreme sums of curvature and torsion of the Sun trajectory in 24 cases out of 28.

Введение

Солнце, как самый массивный объект Солнечной системы, удерживает силой гравитации планеты на их орбитах. Но и планеты, то собираясь в узком секторе, то рассредоточиваясь по пространству, заставляют Солнце совершать орбитальное движение относительно центра инерции Солнечной системы (ЦИСС). Такое вынужденное движение Солнца под воздействием внешних сил вызывает различные аномалии в солнечной активности. Теодор Ландшайт в работах [1, 2] и других наиболее полно и последовательно проанализировал эту связь. Он показал, что орбитальный угловой момент Солнца и его производные влияют на числа Вольфа и другие солнечные явления. Прогнозы Т. Ландшайта солнечной активности и ее земного эха неоднократно проверялись и показали

удивительно высокую оправдываемость. В одной из своих последних работ [2] автор указывает, что попятное (retrograde) движение Солнца с 178,8-летним периодом является точками синхронизации чисел Вольфа, и на этой основе дает прогноз максимума очередного цикла в 2011,8 году с величиной максимума около $W = 100$ и последующих четырех—пяти слабых циклов с максимумами $W < 80$. В его работах по этой проблеме, как и в работах [3—5] и других, анализ орбитального движения Солнца проводится в неподвижной относительно звезд системе координат.

В [6] был сделан переход в подвижную систему координат с началом в центре масс Солнца и осями, определяемыми репером Френе (сопровождающим триэдром). Были найдены кручение и кривизна траектории движения центра масс Солнца относительно ЦИСС с шагом по времени в один год. Оказалось, что, как правило, максимум чисел Вольфа находится рядом с экстремумами или точками перегиба (перелома) в интеграле от кручения траектории движения Солнца.

Рассмотрим совместное воздействие кручения и кривизны на солнечную активность, измеряемую числами Вольфа.

Движение Солнца в неподвижной системе координат

Центр инерции (центр масс) системы из n материальных точек с массами m_k ($k = 1, n$) и координатами, заданными в момент времени t векторами $\mathbf{R}_k(t)$, определяется как точка, при помещении в которую начала координат выполняется равенство

$$\sum_1^n \mathbf{R}_k(t) m_k = 0. \quad (1)$$

Известно, что такая точка существует, и она единственная в каждый момент времени.

Применим теперь (1) к Солнечной системе:

$$\sum_0^9 \mathbf{R}_k(t) m_k = 0, \quad (2)$$

где индекс «0» относится к Солнцу, а остальные — порядковые номера планет, включая Плутон. Под массой понимается масса планеты с ее спутниками. Возникают две проблемы. Во-первых, Солнце, в отличие от планет, не может считаться материальной точкой, так как линейный размер и радиус кривизны траектории Солнца — величины одного порядка. И во-вторых, Солнце не твердое и не однородное тело, а значит, его центр масс может перемещаться относительно своего геометрического центра.

Первую проблему можно формально обойти, если мысленно разделить Солнце, скажем, на миллиард одинаковых по массе компактных частей и

вставить их в уравнение (1). Линейные размеры этих частей будут на 3 порядка меньше диаметра Солнца и кривизны его траектории, т. е. модель материальной точки будет к ним применима. Тогда уравнение (2) примет вид

$$10^{-9} m_0 \sum_1^{10^{**9}} \mathbf{r}_j(t) + \sum_1^9 \mathbf{R}_k(t) m_k = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{r}_j — вектор от центра инерции до выделенной частицы Солнца. У Солнца, разделенного на множество небольших частей, также есть свой центр масс. Представляя

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_0 + \mathbf{s}_j,$$

где \mathbf{R}_0 — вектор от центра инерции Солнечной системы до центра масс Солнца; \mathbf{s}_j — векторы из центра масс Солнца до его частей, вставляя \mathbf{r}_j в (3) и учитывая, что сумма \mathbf{s}_j равна нулю, получим уравнение (2).

Вторая проблема сложнее: геометрический центр Солнца как шара может не совпадать с центром его масс за счет смещения внешних оболочек относительно солнечного ядра. И если по Кеплеру фокус орбиты Земли находится в центре Солнца, то о каком центре идет речь: о геометрическом или о центре масс? Надо помнить об этой проблеме при интерпретации результатов.

Перепишем теперь уравнение (2) в виде

$$\mathbf{R}_0(t) = - \sum_1^9 \mathbf{R}_k(t) m_k / m_0. \quad (4)$$

Зная координаты планет и их массы со спутниками относительно массы Солнца, из уравнения (4) найдем вектор смещения центра масс Солнца относительно ЦИСС, который для краткости иногда будем называть «смещением Солнца».

На рис. 1 приводится график модуля вектора $\mathbf{R}_0(t)$ и угла между ним и перигеем орбиты Земли. Угол необычно изменялся в 1985—1996 гг.: вектор смещения, пройдя перигелий, «попятился» назад и снова прошел вперед через перигелий. Это довольно редкое событие, с указанным ранее периодом в 178,8 лет и с ним, в частности, связывают некоторые аномальные явления в лито-, гидро- и атмосфере Земли.

Первопричиной нынешнего попятного движения Солнца явилось, как всегда, схождение тяжелых планет в узком секторе в 1982—1983 гг. По нашему мнению, именно наложение попятного движения Солнца на перигелий орбиты Земли с достижением в этот период экстремальных значений модулем вектора смещения и явилось непосредственной причиной современного потепления [7].

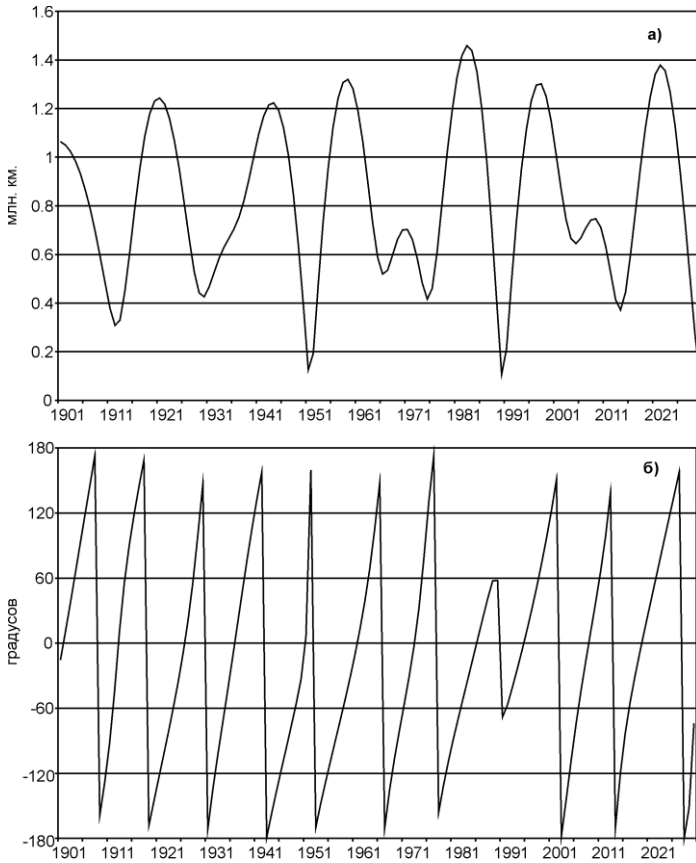


Рис. 1. Вектор смещения центра масс Солнца от центра инерции Солнечной системы в неподвижной системе координат:

а — модуль вектора; б — угол между вектором и направлением на перигелий Земли

Алгоритм вычисления кривизны и кручения по пяти точкам

Пусть в 3-мерном пространстве задана траектория движения точки

$$\mathbf{R}(u) = (x(u), y(u), z(u)),$$

где u — параметр. Обозначим через \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} единичные векторы (касательной, нормали, бинормали) сопровождающего триэдра кривой $\mathbf{R}(u)$. По определению, вектор Дарбу есть

$$\mathbf{\Omega} = \rho \mathbf{b} + \tau \mathbf{t} \quad (5)$$

где ρ , τ — кривизна и кручение кривой $R(u)$, равные

$$\rho = \frac{|R^{[1]} \times R^{[2]}|}{|R^{[1]}|^3}, \quad \tau = \frac{|R^{[1]} R^{[2]} R^{[3]}|}{|R^{[1]} \times R^{[2]}|^2}. \quad (6)$$

Цифры в квадратных скобках обозначают номер производной по параметру u . Будем также считать, что для всех точек кривой $\mathbf{R}(u)$ выполняются условия

$$(\mathbf{R}^{[1]} \times \mathbf{R}^{[2]}) \neq \mathbf{0}. \quad (7)$$

И пусть известны значения вектора \mathbf{R} в n точках u_1, u_2, \dots, u_n :

$$\mathbf{R}(u_k) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (8)$$

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n. \quad (9)$$

Займемся теперь нахождением кривизны и кручения кривой $\mathbf{R}(u)$ в точках $u = u_k$ на основе (6—9). Для достаточно гладких функций можно разложить вектор $\mathbf{R}(u)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки u_k с точностью до членов порядка $(u - u_k)^5$:

$$\mathbf{R}(u) \approx \mathbf{R}(u_k) + \sum_{h=1}^{h=4} \mathbf{R}^{[h]}(u - u_k)^h / h! \quad (10)$$

В уравнении (10) неизвестны 4 производных от вектора \mathbf{R} в точке u_k . Для их оценки возьмем пять точек: $u_{k-2}, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}$ и составим систему из четырех уравнений:

$$\mathbf{R}(u_{k+j}) - \mathbf{R}(u_k) = \sum_{h=1}^{h=4} \mathbf{R}^{[h]}(u_{k+j} - u_k)^h / h! \quad (j = -2, -1, 1, 2). \quad (11)$$

Для удобства введем обозначения $b_j = u_{k+j} - u_k$ и выпишем систему (11) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(u_{k-2}) - \mathbf{R}(u_k) \\ \mathbf{R}(u_{k-1}) - \mathbf{R}(u_k) \\ \mathbf{R}(u_{k+1}) - \mathbf{R}(u_k) \\ \mathbf{R}(u_{k+2}) - \mathbf{R}(u_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{-2} & b_{-2}^2 / 2! & b_{-2}^3 / 3! & b_{-2}^4 / 4! \\ b_{-1} & b_{-1}^2 / 2! & b_{-1}^3 / 3! & b_{-1}^4 / 4! \\ b_1 & b_1^2 / 2! & b_1^3 / 3! & b_1^4 / 4! \\ b_2 & b_2^2 / 2! & b_2^3 / 3! & b_2^4 / 4! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{[1]}(u_k) \\ \mathbf{R}^{[2]}(u_k) \\ \mathbf{R}^{[3]}(u_k) \\ \mathbf{R}^{[4]}(u_k) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Обозначим через \mathbf{A} матрицу системы (12). Тогда детерминант системы сводится к определителю Вандермонда:

$$D_k = \det(\mathbf{A}) = \frac{b_{-2} b_{-1} b_1 b_2}{2!3!4!} (b_{-1} - b_{-2})(b_1 - b_{-2})(b_2 - b_{-2})(b_1 - b_{-1})(b_2 - b_{-1})(b_2 - b_1). \quad (13)$$

Из условия (9) и определения b_j следует, что $b_{-2} < b_{-1} < 0 < b_1 < b_2$, и поэтому детерминант (13) $D_k \neq 0$ для всех $k = 3, \dots, n - 2$, и, следовательно, существует единственное решение системы (12), которое имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}^{[1]}(u_k) \\ \mathbf{R}^{[2]}(u_k) \\ \mathbf{R}^{[3]}(u_k) \\ \mathbf{R}^{[4]}(u_k) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(u_{k-2}) - \mathbf{R}(u_k) \\ \mathbf{R}(u_{k-1}) - \mathbf{R}(u_k) \\ \mathbf{R}(u_{k+1}) - \mathbf{R}(u_k) \\ \mathbf{R}(u_{k+2}) - \mathbf{R}(u_k) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В частном случае, когда $u_k = k \Delta$, $b_j = j\Delta$, ($\Delta = \text{const}$),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\Delta & 2\Delta^2 & -4\Delta^3/3 & 2\Delta^4/3 \\ -\Delta & \Delta^2/2 & -\Delta^3/6 & \Delta^4/24 \\ \Delta & \Delta^2/2 & \Delta^3/6 & \Delta^4/24 \\ 2\Delta & 2\Delta^2 & 4\Delta^3/3 & 2\Delta^4/3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^7 \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta^6/12 & -2\Delta^6/3 & 2\Delta^6/3 & -\Delta^6/12 \\ -\Delta^5/12 & 4\Delta^5/3 & 4\Delta^5/3 & -\Delta^5/12 \\ -\Delta^4/2 & \Delta^4 & -\Delta^4 & \Delta^4/2 \\ \Delta^3 & -4\Delta^3 & -4\Delta^3 & \Delta^3 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Формула (14) с матрицей (15) дает оценку первых четырех производных вектора R в точке u_k для равноотстоящих значений параметра u по значениям вектора в пяти точках: $\mathbf{R}(u_{k-2})$, $\mathbf{R}(u_{k-1})$, $\mathbf{R}(u_k)$, $\mathbf{R}(u_{k+1})$, $\mathbf{R}(u_{k+2})$.

Зная первые три производные, находим кривизну и кручение траектории по формуле (6).

Движение Солнца в подвижной системе координат

Зная координаты планет в различные моменты времени u_1, \dots, u_n по формуле (4), получим оценку координат траектории движения Солнца $\mathbf{R}_0(u_k)$. По (6) вычислим кривизну и кручение траектории, учитывая, что условия применения этой формулы (7) и (9) выполняются. Заметим, что возможен и обратный переход: зная кривизну, кручение и значение \mathbf{R}_0 в одной точке, можно однозначно восстановить $\mathbf{R}_0(u)$. Иными словами, переход в движущуюся систему координат не приводит к потере никакой информации о движении Солнца.

При оценке параметров вектора Дарбу важно выбрать шаг по времени или по длине отрезка траектории. При маленьком шаге, например в одни сутки, потребуется очень большая точность в вычислении координат планет, чтобы уловить кривизну траектории Солнца на интервале в 5 суток. Если же взять слишком большой шаг, например в 3 года, то за 15 лет Солнце уйдет на второй оборот, и корректную оценку параметров не получить. Оптимальным представляется шаг от полугода до одного года.

На рис. 2 представлены графики изменения кривизны и кручения траектории Солнца с шагом в 1 год за период 1701—2050 гг. Параметр

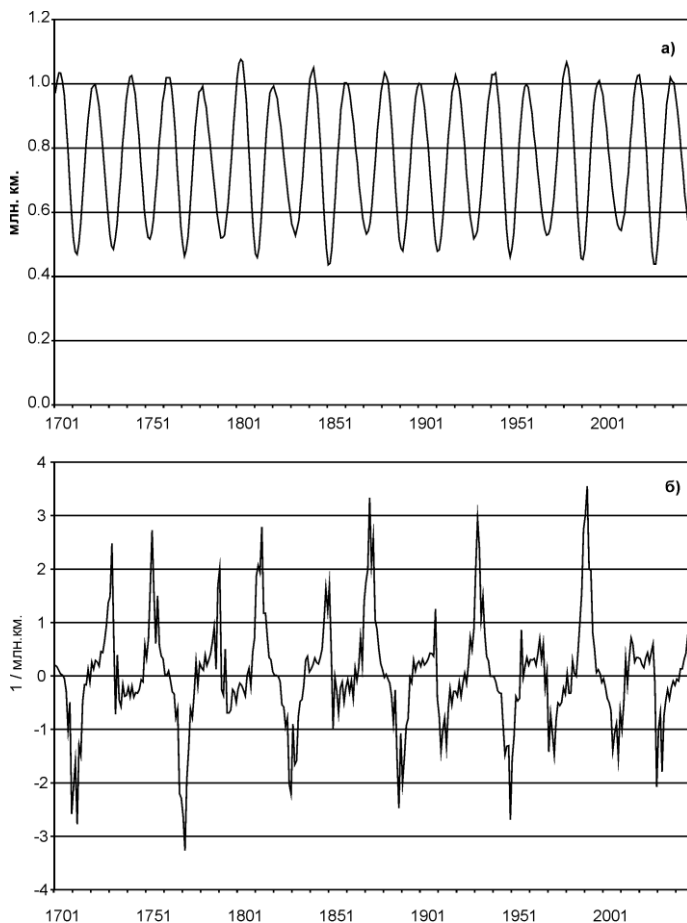


Рис. 2. Параметры движения центра масс Солнца в подвижной системе координат:
а — радиус кривизны траектории; б — кручение траектории

кривизны ведет себя как почти периодическая функция с основным периодом около 20 лет, который, очевидно, определяется периодом схождения Юпитера с Сатурном в 19,86 года. В цитированных и других работах исследовали связь радиуса кривизны – параметр, обратный к кривизне, — с солнечной активностью. Кручение — это более сложная функция: видны два типа экстремумов, модуль кручения которых больше или меньше 2 (млн км)^{-1} . Параметры вектора Дарбу характеризуют разные силы, воздействующие на Солнце: кривизна отражает центростремительные силы, а кручение характеризует гироскопические силы, которые выводят вращающееся вокруг своей оси тело из плоскости его орбитального вращения.

Анализ зависимости солнечной активности от параметров вектора Дарбу

Рассмотрим теперь связь максимумов чисел Вольфа с кривизной и кручением. Среднегодовые числа Вольфа взяты из ftp.ngdc.noa.gov/STP/SOLAR_DATA/SUNSPOT_NUMBERS/YEARLY

На рис. 3 представлены суммы аномалий кривизны и кручения с нанесенными на них максимумами чисел Вольфа. За «норму» кривизны взято среднее значение за период 1701—2050 гг., равное $1,39 \text{ (млн км)}^{-1}$, а за «норму» кручения, естественно, взят ноль.

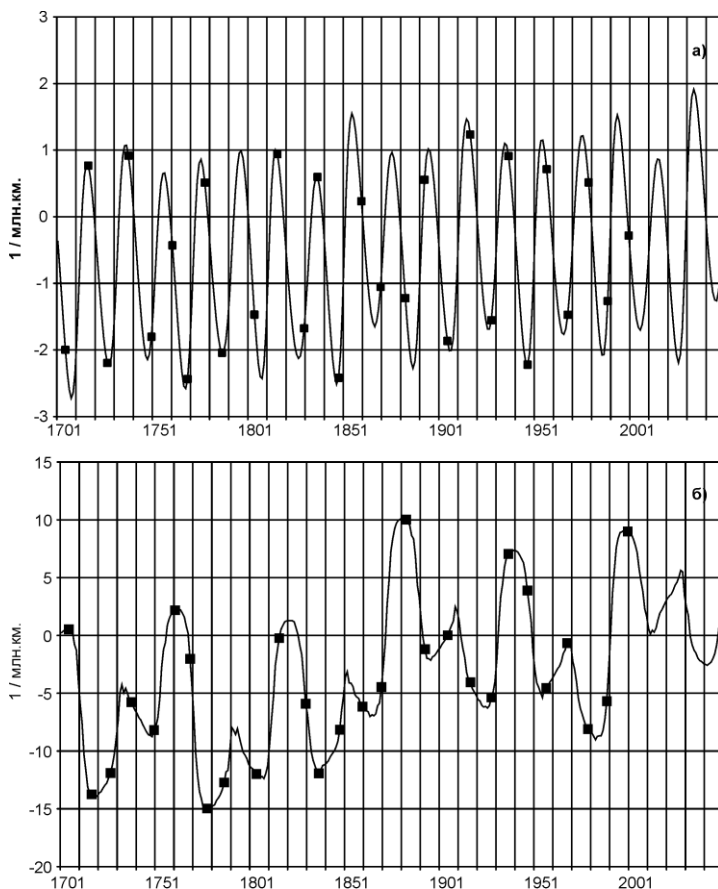


Рис. 3. Суммы аномалий кривизны (а) и кручения (б) траектории Солнца с годами максимумов чисел Вольфа (квадратики)

Если рассматривать только кручение, то год максимумов чисел Вольфа близки к годам достижения экстремумов кручения, когда суммы аномалий имеют значительный прирост или спад. К этой группе можно отнести следующие года максимумов: 1705, 1717, 1761, 1778, 1837, 1883, 1893, 1937, 1957, 1968, 1979, 2000 и сюда же можно присоединить пару лет с небольшими экстремумами кручения: 1750, 1804. Исключение составляет максимум 1830 г., который начался на несколько лет раньше достижения кривизной локального максимума, весьма значительного по величине.

Зависимость годов максимума чисел Вольфа от экстремумов сумм аномалий кривизны и кручения траектории движения Солнца

Номер цикла	Год максимума	Среднегодовое число Вольфа	Экстремумы	
			кривизны	кручения
-4	1705	59		макс.
-3	1717	63	макс.	мин.
-2	1727	122	мин.	
-1	1738	111	макс.	
0	1750	83		мин.
1	1761	86		макс.
2	1769	106	мин.	
3	1778	154		мин.
4	1787	132	мин.	
5	1804	48		мин.
6	1816	46	макс.	
7	1830	71	?	?
8	1837	138	макс.	мин.
9	1848	125	мин.	
10	1860	96	?	?
11	1870	139	?	?
12	1883	64		макс.
13	1893	85		мин.
14	1905	64	мин.	
15	1917	104	макс.	
16	1928	78	мин.	
17	1937	114	макс.	макс.
18	1947	152	мин.	
19	1957	190		мин.
20	1968	106		макс.
21	1979	155		мин.

Суммы аномалий кривизны также часто располагают свои экстремумы рядом с годами максимумов чисел Вольфа, как бы выходя на первый план, когда суммы аномалий кручения значительно меньше среднего значения. К этой группе относятся 1717, 1927, 1738, 1769, 1787, 1816, 1837, 1848, 1905, 1917, 1928, 1937, 1947 года. Отметим совпадение экстремумов кривизны и кручения в трех случаях: в 1717, 1837 и 1937 г.

Четыре максимума — 1830, 1860, 1870, 1989 гг. — расположены на значительном удалении от локальных экстремумов кручения и кривизны, хотя первый из них попадает на точку перегиба, а второй — на точку перелома интеграла от кручения траектории Солнца.

Результаты проведенного анализа сведены в таблицу. В таблице указан тип экстремума (максимум или минимум), а вопросами отмечены года, не укладывающиеся в общую схему.

Построение физико-статистической модели, объясняющей совместное влияние двух разных по своей физической сущности компонент вектора Дарбу на солнечную активность, — это проблема будущих исследований.

Выводы

1. Представлен алгоритм нахождения параметров вектора Дарбу по 5-точечной схеме для равного шага по времени.

2. Для интервала 1701—2050 гг. найдены кривизна и кручение траектории движения Солнца относительно центра инерции Солнечной системы.

3. Максимумы чисел Вольфа располагаются вблизи значительных по абсолютной величине локальных сумм аномалий кручения. В целом экстремумы кручения располагаются рядом с 14 максимумами чисел Вольфа, а из оставшихся 14 рядом с экстремумами сумм аномалий кривизны располагаются 10 максимумов чисел Вольфа.

Литература

1. *Landscheidt T.* Solar Rotation, Impulses of the Torque in the Sun's Motion, and Climatic Variation // *Climatic Change*. 1988. N 12. P. 265—295.
2. *Landscheidt T.* Extrema in sunspot cycle linked to sun's motion // *Solar Physics*. 1999. Vol. 189. P. 413—424.
3. *Jose P.D.* Sun`s motion and sunspots // *The Astronomicval Journal*. 1965. Vol. 70, N 3. P. 193.
4. *Войчишин К.С., Драган Я.П., Куксенко В.И., Михайловский В.Н.* Информационные связи био-, гелио-, геофизических явлений и элементы их прогноза. Киев: Наукова думка, 1974.

5. Морозова А.Л., Пудовкин М.И., Черных Ю.В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т. 39, № 2. С. 40—44.
6. Zavalishin N.N. Effect of the Sun shift from the center of inertia on the temperature of the troposphere // Atmospheric and Ocean Optics. 2009. Vol. 22, N 1. P. 118—120.
7. Завалишин Н.Н. О геофизических эффектах дисимметрии Солнечной системы // Солнечно-земная физика. 2005. Вып. 8. С. 185—186.