УДК 517.955.4

Ю. Ю. Клевцова

О существовании стационарной меры для стохастической системы модели Лоренца бароклинной атмосферы

Рассматривается одна нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами. Эта система описывает двухслойную квазисоленоидальную модель Лоренца бароклинной атмосферы на вращающейся двумерной сфере. Правая часть системы возмущается белым шумом. Выводятся достаточные условия на параметры и правую часть для существования стационарной меры.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: двухслойная квазисоленоидальная модель Лоренца бароклинной атмосферы, возмущение белым шумом, существование стационарной меры.

DOI: 10.4213/sm8181

§ 1. Введение

В настоящей работе мы, следуя [1], продолжаем рассматривать следующую систему уравнений двухслойной квазисоленоидальной модели Лоренца бароклинной атмосферы:

$$\frac{\partial}{\partial t}A_1u+\nu A_2u+A_3u+B(u)=g, \qquad t>0, \tag{1.1}$$

заданную на единичной двумерной сфере S с центром в нуле в сферической системе координат

$$(\lambda,\varphi), \qquad \lambda\in[0,2\pi), \quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \mu=\sin\varphi.$$

Здесь $\nu>0$ – коэффициент кинематической вязкости, $u(t,x,\omega)=(u_1(t,x,\omega), u_2(t,x,\omega))^{\mathrm T}$ – неизвестная и $g(t,x,\omega)=(g_1(t,x,\omega),\, g_2(t,x,\omega))^{\mathrm T}$ – заданная случайные вектор-функции, $x=(\lambda,\mu)$, $\omega\in\Omega$, $(\Omega,F,\mathbb P)$ – полное вероятностное пространство. Операторы, входящие в уравнение (1.1), определены на сфере S и задаются соотношениями

$$A_1=\begin{pmatrix}-\Delta & 0\\ 0 & -\Delta+\gamma\end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix}\Delta^2 & 0\\ 0 & \Delta^2\end{pmatrix},$$
$$A_3=\begin{pmatrix}-k\Delta & 2k\Delta\\ k\Delta & -(2k+k_1+\nu\gamma)\Delta+\rho\end{pmatrix},$$
$$B(u)=\bigl(J(\Delta u_1+2\mu,u_1)+J(\Delta u_2,u_2), J(\Delta u_2-\gamma u_2,u_1)+J(\Delta u_1+2\mu,u_2)\bigr)^{\mathrm T}.$$

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4907.2012.5).

Здесь $\gamma, \rho, k, k_1 \geqslant 0$ – числовые параметры, $J(\psi, \theta) = \psi_\lambda\theta_\mu - \psi_\mu\theta_\lambda$ – оператор Якоби, $\Delta\psi = ((1-\mu^2)\psi_\mu)_\mu + (1-\mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$ – оператор Лапласа–Бельтрами (см., например, [2; § 1]). Отметим, что константы γ, ρ, k, k_1 неотрицательны, а ν положительна. В [1] в качестве правой части системы (1.1) рассматривалась случайная вектор-функция

$$g = f + \eta, \tag{1.2}$$

где случайная внешняя сила

$$f(t, x, \omega) = (f_1(t, x, \omega), f_2(t, x, \omega))^{\mathrm{T}}$$

почти наверное является локально квадратично суммируемой по t и случайная вектор-функция

$$\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^{\mathrm{T}}$$

– белый шум по t. Для этой системы было доказано существование единственного решения задачи Коши со случайными начальными данными в некоторых функциональных пространствах и была приведена оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности случайных начальных данных и внешней силы на конечном отрезке изменения переменной t.

В настоящей работе при некоторых дополнительных ограничениях на параметры и правую часть будет получено существование стационарной меры для системы (1.1), (1.2), когда $f(t, x, \omega)$ не зависит от t.

В предисловии к книге В. П. Дымникова [3] подробно описывается необходимость исследования вопроса о существовании стационарной меры у систем уравнений, описывающих динамику атмосферы, для изучения проблемы предсказуемости климата.

Автор выражает благодарность В. П. Дымникову и В. Н. Крупчатникову за постановку задачи.

§ 2. Функциональные пространства

Везде ниже X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Пусть $L_2(S)$ – лебегово пространство измеримых функций $\psi\colon S \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\psi\|_{L_2(S)} = \biggl(\int_S |\psi|^2\, dS\biggr)^{1/2} < \infty.$$

При этом $L_2(S)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \theta) = \int_S \psi\theta\, dS.$$

Обозначим через $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; X)$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$, пространство измеримых по Бохнеру функций $\psi\colon \mathbb{R}^+ \to X$ таких, что

$$\int_I \|\psi(t)\|_X^2\, dt < \infty$$

для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}^+$. При этом функции, отличающиеся на множествах лебеговой меры нуль, отождествляются.

Нам будет необходимо также пространство непрерывных функций с областью значений в банаховом пространстве. Обозначим через $C(\mathbb{R}^+; X)$ пространство всех непрерывных функций $\psi\colon \mathbb{R}^+ \to X$. Снабженное метрикой

$$d(\psi,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\max_{t\in[0,i]} \|\psi(t)-\theta(t)\|_X}{1+\max_{t\in[0,i]} \|\psi(t)-\theta(t)\|_X}$$

пространство $C(\mathbb{R}^+; X)$ является полным метрическим пространством.

Обозначим через $C^\infty(S)$ пространство таких бесконечно гладких функций $\psi\colon S \to \mathbb{R}$, для которых выполнено

$$\int_S \psi\, dS = 0. \tag{2.1}$$

Функция $\psi\colon S \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно гладкой* (см., например, замечание 1 к определению 1 в [2; § 2] и [4; гл. I, § 3.2]), если для любой декартовой системы координат $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ с началом координат в центре единичной сферы S функция

$$\widetilde{\psi}(\varphi,\lambda) = \psi(\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, -\sin\varphi)$$

принадлежит пространству $C^\infty((-\pi/2,\pi/2)\times[0,2\pi])$. Здесь φ и λ – углы в сферической системе координат, связанной с декартовой системой координат $\overline{x}$.

Введем в пространстве $C^\infty(S)$ семейство норм

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^p\psi,\psi)^{1/2}, \qquad p\in\mathbb{Z}.$$

Обозначим через h^p, $p\in\mathbb{Z}$, пространства, полученные пополнением[1] по нормам $\|\cdot\|_p$, $p\in\mathbb{Z}$, пространства $C^\infty(S)$. Имеют место следующие вложения:

$$\cdots \subset h^2 \subset h^1 \subset h^0 \subset h^{-1} \subset h^{-2} \subset \cdots,$$

где операторы вложения компактны (см., например, [6; гл. I, § 3, лемма 1.6]) и, следовательно, непрерывны (см., например, [5; гл. I, § 6, гл. X, § 1]). Заметим, что h^p плотно вложено в h^q при $q<p$ (см., например, [6; гл. I, § 3, леммы 1.1, 1.4, б), в)]).

Оператор $-\Delta$ на пространстве $C^\infty(S)$ со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ положительно определен (см., например, [2; § 2, доказательство леммы 1, формула (22)] и [6; гл. I, § 3, лемма 1.2]). Поэтому он может быть расширен до самосопряженного по Фридрихсу (см., например, [7; § 31], [6; гл. I, § 3] и [8; § 5])

$$-\Delta\colon D(-\Delta) = h^{p+2} \subset h^p \to h^p, \qquad p\in\mathbb{Z},$$

где $D(A)$ – область определения оператора A. Тогда положительно определен и самосопряжен оператор

$$(-\Delta)^{q/2}\colon D((-\Delta)^{q/2}) = h^{p+q} \subset h^p \to h^p, \qquad p,q\in\mathbb{Z}, \quad q>0$$

[1] См., например, доказательство теоремы о пополнении в [5; гл. I, § 10].

(см., например, [9], [7; § 31], [10; гл. XIII] и [6; гл. I, § 3]), и

$$\|\psi\|_p = \big((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{p/2}\psi\big)^{1/2} \quad \text{для любого} \quad \psi \in h^p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что скалярное произведение $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ может быть продолжено до билинейного непрерывного отображения $h^p \times h^{-p} \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, следующим образом:

$$(\psi, \theta) = ((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{-p/2}\theta), \qquad p \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

где $\psi \in h^p$, $\theta \in h^{-p}$. Тогда имеет место обобщенное неравенство Коши–Буняковского

$$|(\psi, \theta)| \leqslant \|\psi\|_p \|\theta\|_{-p} \quad \text{для любых} \quad \psi \in h^p, \quad \theta \in h^{-p}, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Обозначим через $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, пространства измеримых вектор-функций $\psi\colon S \to \mathbb{R}^2$ с нормой

$$|||\psi|||_p = \langle A_0^{p/2}\psi, A_0^{p/2}\psi\rangle^{1/2},$$

$$p \in \mathbb{Z}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \qquad \langle \psi, \theta \rangle = \int_S \langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2}\, dS,$$

$$\langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2} \quad \text{– скалярное произведение в} \ \ \mathbb{R}^2,$$

и через $\varkappa$ пространство

$$C(\mathbb{R}^+; H^2) \cap L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^3). \tag{2.4}$$

Заметим, что $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, являются сепарабельными гильбертовыми пространствами (см., например, [1; § 2]).

Введем понятие полного вероятностного пространства (см., например, [11; гл. I, § 2, § 4]).

Пусть Ω – произвольное множество, F – некоторое семейство его подмножеств; F называют *σ-алгеброй*, если $\varnothing \in F$ и F замкнуто относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из F. При этом пара (Ω, F) – *измеримое пространство*, если F – σ-алгебра подмножеств Ω. *Мерой* называют неотрицательную счетно-аддитивную функцию, определенную на некоторой σ-алгебре измеримого пространства; $\mathbb{P}$ – *вероятностная мера* на измеримом пространстве (Ω, F), если $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Тройку $(\Omega, F, \mathbb{P})$ называют *вероятностным пространством*. Под *пополнением* $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}$ σ-алгебры F по вероятностной мере $\mathbb{P}$ будем понимать $F \cup N_{\mathbb{P}}$, где $N_{\mathbb{P}}$ – семейство подмножеств $M \subset \Omega$ таких, что существует подмножество $N \subset \Omega$, $N \in F$, что $M \subset N$ и $\mathbb{P}(N) = 0$. Если $\mathrm{F}_{\mathbb{P}} = F$, то $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – *полное вероятностное пространство*.

В дальнейшем полагаем, что $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство.

Определим банахово пространство $L_2(\Omega; X)$ (см., например, [12; гл. II, § 10.5, теорема 7]) измеримых по Бохнеру функций $\psi\colon \Omega \to X$ таких, что конечна норма

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega;X)} = \sqrt{E\|\psi\|_X^2} = \left(\int_\Omega \|\psi\|_X^2\, d\mathbb{P}\right)^{1/2} < \infty.$$

При этом функции, отличающиеся на множествах $\mathbb{P}$-меры нуль, отождествляются.

В следующих двух абзацах приведены определения из [11; гл. I, § 2, § 7, § 22, гл. III, § 2], [13; гл. II, § 1, гл. IV, § 5] и [14; гл. I, § 1.1, § 3.3].

В пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$ введем *фильтрацию* $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ – неубывающее семейство σ-алгебр $F_s \subset F_t$, $s < t$, при этом $F_t \subset F$, $t \geqslant 0$. Фильтрацию $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ назовем *непрерывной справа*, если

$$\bigcap_{s>t} F_s = F_t, \qquad t \geqslant 0.$$

Будем говорить, что фильтрация $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет *обычным условиям*, если $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ – непрерывная справа фильтрация такая, что все множества $\mathbb{P}$-меры нуль σ-алгебры F содержатся в F_0.

В дальнейшем полагаем, что фильтрация $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет обычным условиям.

Наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые множества топологического пространства $\mathscr{T}$, называют *борелевской σ-алгеброй $\mathscr{T}$*. Множества, принадлежащие борелевской σ-алгебре, называют *борелевскими*. Обозначим через $\sigma_{\mathscr{T}}$ борелевскую σ-алгебру $\mathscr{T}$. Отображение $\psi\colon (\Omega, F) \to (X, \sigma_X)$ называют *$F|\sigma_X$-измеримым* или *случайной величиной*, если $\{\omega \in \Omega\colon \psi(\omega) \in M\} \in F$ для любого $M \in \sigma_X$. Произвольное непустое семейство случайных величин, индексированное некоторым множеством вещественных параметров, называют *случайным процессом*. Обозначим через $\sigma(\psi)$ наименьшую σ-алгебру, содержащую все прообразы множеств из σ_X при отображении ψ. Пусть G – σ-алгебра такая, что $G \subset F$. Случайная величина ψ *не зависит от σ-алгебры G*, если

$$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(M_2) \quad \text{для любых} \;\; M_1 \in \sigma(\psi), \quad M_2 \in G.$$

Случайный процесс $\xi(t)\colon \Omega \to X$, $t \geqslant 0$, *согласован с фильтрацией* $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$, если отображение $\xi(t)$ $F_t|\sigma_X$-измеримо при каждом $t \geqslant 0$. Случайный процесс $\xi(t)\colon \Omega \to X$, $t \geqslant 0$, *измерим*, если отображение $(t, \omega) \to \xi(t, \omega)$, где $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, является $\sigma_{\mathbb{R}^+} \oplus F|\sigma_X$-измеримым. Заметим, что под прямым произведением $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ σ-алгебр σ_1 и σ_2 двух произвольных множеств мы будем понимать минимальную σ-алгебру, которая содержит все множества вида $M_1 \times M_2$, где $M_1 \in \sigma_1$ и $M_2 \in \sigma_2$. Случайный процесс $\xi(t)\colon \Omega \to X$, $t \geqslant 0$, *прогрессивно измерим по отношению к* $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$, если для любого $t \geqslant 0$ отображение $(s, \omega) \to \xi(s, \omega)$, где $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, является $\sigma_{[0,t]} \otimes F_t|\sigma_X$-измеримым. Очевидно, что прогрессивно измеримый процесс является измеримым процессом.

Пусть $\mathscr{P}(X)$ – семейство вероятностных мер на измеримом пространстве (X, σ_X). Обозначим через $B_b(X)$ (через $C_b(X)$) пространство ограниченных $\sigma_X|\sigma_{\mathbb{R}}$-измеримых (непрерывных) функций $\psi\colon X \to \mathbb{R}$. При этом оба пространства снабжаются нормой

$$\sup_{\vartheta\in X} |\psi(\vartheta)|.$$

Определим действие меры $\mu \in \mathscr{P}(X)$ на функцию $\psi \in C_b(X)$ по следующему правилу:

$$(\psi, \mu) = \int_X \psi \, d\mu.$$

Тогда (ψ, μ), $\psi \in C_b(X)$, – линейный непрерывный функционал на пространстве $C_b(X)$. Следовательно, $\mathscr{P}(X)$ можно рассматривать как подмножество сопряженного пространства $C_b^*(X)$.

Введем гильбертово пространство l_2 последовательностей $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел с конечной нормой

$$\|\{b_i\}_{i=1}^{\infty}\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right)^{1/2} < \infty$$

и подмножество этого пространства

$$l_2^+ = \bigl\{\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2 : b_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \dots\bigr\}.$$

§ 3. Феллеровский однородный марковский процесс

Пусть заданы F_0-измеримые случайные вектор-функции $f(x,\omega)$, где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и $u_0(x,\omega)$, где $u_0 \in H^2$ почти наверное. Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1), (1.2)

$$u(0) = u_0. \tag{3.1}$$

Обозначим через $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормированный базис пространства H^0. В качестве случайной вектор-функции η рассмотрим

$$\eta(t,x,\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\zeta(t,x,\omega), \qquad \zeta(t,x,\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t,\omega) E_i, \tag{3.2}$$

где $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, а $\{\beta_i(t,\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, $t \geqslant 0$, – последовательность независимых действительных броуновских движений, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ (см. определение 7 в [11; “Дополнения и упражнения” к гл. III]). Тогда ряд в (3.2) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}^+; H^0)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ (см., например, доказательство теоремы 4.3 в [14; гл. I, § 4.1]).

Поскольку почти все траектории броуновского движения не дифференцируемы ни в одной точке (см., например, [11; гл. III, § 1, теорема 1]) и производная броуновского движения существует почти наверное только в обобщенном смысле (см., например, [15; гл. III, § 1.4]), то необходимо придать смысл системе (1.1), (1.2). Будем считать, что это формальная запись стохастического интегрального уравнения, т.е. введем следующее определение решения задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) из [1].

Определение 1. Случайный процесс $u(t,x,\omega,0,u_0)$, $t \geqslant 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, со значениями в H^2 будем называть *решением задачи Коши* (1.1), (1.2), (3.1), если он обладает следующими свойствами:

a) случайный процесс $u(t)$, $t \geqslant 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ и почти все его траектории принадлежат пространству $\varkappa$;

b) почти все траектории случайного процесса $u(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяют равенству

$$A_1u(t) + \int_0^t \bigl(\nu A_2u(s) + A_3u(s) + B(u(s))\bigr)\,ds = A_1u_0 + tf + \zeta(t), \qquad t > 0,$$

которое имеет место в пространстве $C(\mathbb{R}^+; H^{-1})$.

По теореме 2 из [1] следует, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geqslant 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, F_0-измеримых случайных вектор-функций f, где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0, где $u_0 \in H^2$ почти наверное, существует единственное решение этой задачи Коши.

В этом параграфе будет показано, что решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) является феллеровским однородным марковским процессом. Введем определение феллеровского однородного марковского процесса (см., например, [14; гл. I, § 3.5, гл. III, § 9.2.1] и [11; гл. VI, § 12]).

Определение 2. Пусть $\{P_{st}\}_{t \geqslant s \geqslant 0}$ – семейство линейных операторов, действующих в пространстве $B_b(X)$. Согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geqslant 0}$ случайный процесс $\xi(t)\colon \Omega \to X$, $t \geqslant 0$, называется *марковским с семейством переходных операторов* $\{P_{st}\}_{t \geqslant s \geqslant 0}$, если для любой $\psi \in B_b(X)$ выполнено равенство

$$E(\psi(\xi(t))|F_s) = P_{st}\psi(\xi(s)) \quad \text{почти наверное}, \qquad t \geqslant s \geqslant 0.$$

Напомним определение условного математического ожидания относительно σ-алгебры (см., например, [11; гл. IV, § 1, второй абзац]).

Определение 3. Пусть G – σ-алгебра такая, что $G \subset F$. *Условным математическим ожиданием действительной случайной величины ξ относительно σ-алгебры G* называется такая функция $\Omega \to R$, обозначаемая $E(\xi|G)$, что:

a) $E(\xi|G)$ является $G|\sigma_{\mathbb{R}}$-измеримой;

b) для любого $M \in G$ математические ожидания $E(I_M E(\xi|G))$ и $E(I_M\xi)$ определены и

$$E(I_M E(\xi|G)) = E(I_M\xi),$$

где I_M – индикатор множества M.

В следующей лемме указано достаточное условие существования условного математического ожидания (доказательство см., например, в [11; гл. IV, § 1, третий абзац]).

Лемма 1. *Пусть G – σ-алгебра такая, что $G \subset F$, а ξ – действительная случайная величина. Если $E|\xi| < \infty$, то $E(\xi|G)$ существует и определено однозначно с точностью до множества $\mathbb{P}$-меры нуль.*

Нам будут необходимы следующие свойства условного математического ожидания (доказательство см., например, в [12; гл. II, § 7.4]).

Лемма 2. *Пусть G – σ-алгебра такая, что $G \subset F$, а ξ и ψ – действительные случайные величины такие, что существуют $E(\xi|G)$ и $E(\psi|G)$.*

a) *Если c – константа и $\xi = c$ почти наверное, то*

$$E(\xi|G) = c \quad \text{почти наверное.}$$

b) *Если c_1, c_2 – константы и $E|c_1\xi + c_2\psi| < \infty$, то*

$$E(c_1\xi + c_2\psi|G) = c_1E(\xi|G) + c_2E(\psi|G) \quad \text{почти наверное.}$$

c) *Если ξ не зависит от G и $E|\xi| < \infty$, то*

$$E(\xi|G) = E\xi \quad \text{почти наверное.}$$

d) *Если ψ – $G|\sigma_{\mathbb{R}}$-измеримая случайная величина, $E|\xi| < \infty$ и $E|\xi\psi| < \infty$, то*

$$E(\xi\psi|G) = \psi E(\xi|G) \quad \text{почти наверное.}$$

Определение 4. Если для любого $\psi \in C_b(X)$ выполнено $P_{st}\psi \in C_b(X)$ при $t \geqslant s \geqslant 0$, то марковский процесс называется *феллеровским*.

Определение 5. Если

$$P(s, \vartheta, t, \Gamma) = P_{st}I_\Gamma(\vartheta), \qquad \vartheta \in X, \quad \Gamma \in \sigma_X, \quad t \geqslant s \geqslant 0,$$

зависит лишь от разности $t - s$, то такой марковский процесс называют *однородным*. Обозначим через $P(t, \vartheta, \Gamma) = P(0, \vartheta, t, \Gamma)$ *переходную функцию однородного марковского процесса*.

Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1), (1.2) при $t > s \geqslant 0$. Пусть начальное условие имеет вид

$$u(s) = u_s, \tag{3.3}$$

где F_s-измеримая случайная вектор-функция $u_s(x, \omega)$ такая, что $u_s \in H^2$ почти наверное.

Под решением этой задачи будем понимать прямой аналог определения 1 и обозначать решение будем $u(t, x, \omega, s, u_s)$, $t \geqslant s \geqslant 0$. Заметим, что случайную вектор-функцию $\eta(t, x, \omega)$ можно представить в виде

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t}\zeta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\zeta(t, x, \omega) - \zeta(s, x, \omega)\big). \tag{3.4}$$

В силу теоремы 2 из [11; гл. III, §2] и определения 7 из [11; “Дополнения и упражнения” к гл. III] справедливо равенство

$$\zeta(t - s + s, x, \omega) - \zeta(s, x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\widetilde{\beta}_i(t - s, \omega)E_i, \tag{3.5}$$

где

$$\widetilde{\beta}_i(t - s, \omega) = \beta_i(t - s + s, \omega) - \beta_i(s, \omega), \qquad i = 1, 2, \dots, \quad s \geqslant 0, \quad t - s \geqslant 0,$$

– последовательность независимых действительных броуновских движений, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, относительно фильтрации $\{\widetilde{F}_{t-s}\}_{t-s\geqslant 0}^{s\geqslant 0}$ в F, где

$$\widetilde{F}_{t-s} = F_{t-s+s}, \qquad s \geqslant 0, \quad t-s \geqslant 0.$$

Обозначим $u(t,x,\omega,s,u_s)$ через $\widetilde{u}(t-s,x,\omega,0,u_s)$. Тогда $\widetilde{u}(t-s,x,\omega,0,u_s)$ является решением задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) при $\widetilde{F}_0$-измеримом начальном условии

$$u_0 = u_s$$

в точке $t-s$ с белым шумом, у которого вместо $\{\beta_i(t-s,\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ будем иметь $\{\widetilde{\beta}_i(t-s,\omega)\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда по теореме 2 из [1] можно получить теорему существования единственного решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geqslant 0$, (3.3).

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любых $\nu > 0$, $\gamma,\rho,k,k_1 \geqslant 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, F_0-измеримых случайных вектор-функций f, где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0, где $u_0 \in H^2$ почти наверное, решение задачи Коши* (1.1), (1.2), (3.1) *является марковским процессом с семейством переходных операторов*

$$P_{st}\psi(\vartheta) = E\psi(u(t,x,\omega,s,\vartheta)), \qquad \vartheta \in H^2, \quad t \geqslant s \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Этот марковский процесс является феллеровским и однородным.

Доказательство. Проведем его в три этапа: докажем марковость, феллеровость и однородность указанного в условии теоремы случайного процесса.

Марковость. Доказательство является аналогом доказательства марковости из теоремы 9.8 в [14; гл. III, § 9.2.1]. Из определения 2 следует, что необходимо доказать справедливость равенства

$$E(\psi(u(t,x,\omega,0,u_0))|F_s) = P_{st}\psi(u(s,x,\omega,0,u_0)) \quad \text{почти наверное}, \qquad t \geqslant s \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Заметим, что поскольку $\psi(u(r,x,\omega,0,u_0))$, $r \geqslant 0$, – ограниченная случайная величина, то в силу леммы 1 обе части равенства имеют смысл. При $t = s$ по лемме 2 (по п. d) при $\xi = 1$ почти наверное и п. a)) равенство (3.7) выполнено. Поэтому в дальнейшем полагаем, что $t > s$.

В силу теоремы единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geqslant 0$, (3.3) имеет место

$$u(t,x,\omega,0,u_0) = u(t,x,\omega,s,u(s,x,\omega,0,u_0)) \quad \text{почти наверное}.$$

Обозначим $u(s,x,\omega,0,u_0)$ через κ. Тогда (3.7) эквивалентно

$$E(\psi(u(t,x,\omega,s,\kappa))|F_s) = P_{st}\psi(\kappa) \quad \text{почти наверное}, \qquad t \geqslant s \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Достаточно доказать, что (3.8) выполнено для любого $\sigma(u(s,x,\omega,0,u_0))|\sigma_{H^2}$-измеримого κ, поскольку очевидно, что случайная вектор-функция $u(s,x,\omega,0,u_0)$ является $\sigma(u(s,x,\omega,0,u_0))|\sigma_{H^2}$-измеримой.

Заметим, что если (3.8) выполнено для любой $\psi \in C_b(H^2)$, то (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное замкнутое множество в пространстве H^2. Действительно, замкнутое множество Γ можно аппроксимировать при $n \to \infty$ замкнутыми множествами $\overline{\Gamma}_n$, $n = 1, 2, \dots$, где

$$\Gamma_n = \bigcup_{\upsilon \in \Gamma} \biggl\{\vartheta \in H^2 : |||\upsilon - \vartheta|||_2 < \frac{1}{n}\biggr\}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

и через $\overline{M}$ обозначено замыкание множества M. Справедлива следующая лемма Урысона (доказательство см., например, в [5; введение, § 2]).

Лемма 3. *Пусть M_1 и M_2 – два непересекающихся замкнутых множества в метрическом пространстве $\mathscr{M}$. Тогда существует непрерывная функция $\theta\colon \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ такая, что $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\theta = 1$ на M_1 и $\theta = 0$ на M_2.*

В силу леммы 3 существует непрерывная функция θ_n на H^2 такая, что $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$, $\theta_n = 1$ на Γ и $\theta_n = 0$ на $H^2 \setminus \Gamma_n$ при каждом $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, мы построили последовательность непрерывных ограниченных функций, сходящуюся к функции I_Γ при $n \to \infty$. Поэтому если (3.8) выполнено для любой $\psi \in C_b(H^2)$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий (см., например, [12; гл. II, § 6.4, теорема 3]) и условных математических ожиданий (см., например, [12; гл. II, § 7.4, теорема 2, a)]) равенство (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное замкнутое множество в пространстве H^2.

Поскольку дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством, в силу определения борелевской σ-алгебры следует, что σ_{H^2} совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей все замкнутые множества из H^2. В [16; введение, § 3, гл. I, § 5, гл. II, § 30] описан способ построения борелевских множеств из замкнутых множеств при помощи счетного числа операций объединения, пересечения и вычитания. Используя свойства и классификацию борелевских множеств из [16; гл. I, § 5, гл. II, § 30] и теорему Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий, получим, что если (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное замкнутое множество в пространстве H^2, то (3.8) имеет место для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное борелевское множество в пространстве H^2.

Заметим, что любая функция $\psi \in B_b(H^2)$ может быть сколь угодно точно приближена линейной комбинацией индикаторов борелевских множеств в пространстве H^2, поскольку, например,

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-2^n}^{2^n-1} in\, 2^{-n} I_{\{\vartheta \in H^2 : \psi(\vartheta) \in (in2^{-n}, (i+1)n2^{-n}]\}}.$$

Отсюда получим, что если (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное борелевское множество в пространстве H^2, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий равенство (3.8) будет выполнено для любой $\psi \in B_b(H^2)$. Поэтому (3.8) достаточно доказать для любой $\psi \in C_b(H^2)$.

Рассмотрим случай, когда $\kappa = c$ почти наверное, где c – константа. По построению решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geqslant 0$, (3.3) случайная вектор-функция $u(t,x,\omega,s,\kappa)$ при $\kappa = c$ почти наверное является $\sigma(\zeta(t)-\zeta(s))|\sigma_{H^2}$-измеримой. Поскольку $\zeta(t)-\zeta(s)$ не зависит от F_s в силу определения броуновского движения относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ (см. определение 7 в [11; "Дополнения и упражнения" к гл. III]), то $u(t,x,\omega,s,\kappa)$ не зависит от F_s. Отсюда в силу леммы 2, c) выполнено (3.8).

Пусть κ – простая (принимающая конечное число значений) случайная величина:

$$\kappa = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i I_{M_i}, \tag{3.9}$$

где N – некоторое натуральное число, $\{M_1, M_2, \dots, M_N\}$ – разбиение Ω и $\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_N$ – некоторые элементы пространства H^2. Поскольку рассматривается $\sigma(u(s,x,\omega,0,u_0))|\sigma_{H^2}$-измеримое κ, то

$$M_i \in \sigma(u(s,x,\omega,0,u_0)) \subset F_s, \qquad i = 1,2,\dots,N.$$

Из (3.9) получим

$$u(t,x,\omega,s,\kappa) = \sum_{i=1}^{N} u(t,x,\omega,s,\upsilon_i) I_{M_i} \quad \text{почти наверное.}$$

Отсюда почти наверное

$$E(\psi(u(t,x,\omega,s,\kappa))|F_s) = E\biggl(\sum_{i=1}^{N} \psi(u(t,x,\omega,s,\upsilon_i)) I_{M_i}|F_s\biggr).$$

Поскольку $u(t,x,\omega,s,\upsilon_i)$ не зависит от F_s и I_{M_i} $F_s|\sigma_{\mathbb{R}}$-измерима, по лемме 2, b), c), d) почти наверное

$$E(\psi(u(t,x,\omega,s,\kappa))|F_s) = \sum_{i=1}^{N} P_{st}\psi(\upsilon_i) I_{M_i} = P_{st}\psi(\kappa).$$

Рассмотрим случай, когда κ является произвольной $\sigma(u(s,x,\omega,0,u_0))|\sigma_{H^2}$-измеримой случайной величиной и $E|||\kappa|||_2^2 < \infty$. Имеет место следующая лемма (доказательство которой см., например, в [14; гл. I, § 1.1, лемма 1.1]).

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{M}$ – сепарабельное метрическое пространство с метрикой d и ξ – случайная величина со значениями в $\mathscr{M}$. Тогда существует последовательность простых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ со значениями в $\mathscr{M}$ такая, что $d(\xi,\xi_n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Если $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное подмножество пространства $\mathscr{M}$, то можно рассмотреть в качестве такой последовательности*

$$\xi_n(\omega) = \upsilon_{j_n(\omega)}, \qquad n = 1,2,\dots,$$

где

$$j_n(\omega) = \min\{i \leqslant n : d_n(\omega) = d(\xi(\omega),\upsilon_i)\}, \qquad d_n(\omega) = \min_{i=1,2,\dots,n} d(\xi(\omega),\upsilon_i).$$

Пусть в лемме 4

$$\mathscr{M} = H^2, \qquad d(m_1, m_2) = |||m_1 - m_2|||_2$$

и $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в пространстве H^2. Тогда по явному виду последовательности, указанному в лемме 4, $E|||\kappa|||_2^2 < \infty$ и по теореме о монотонной сходимости (см., например, теорему 1 в [12; гл. II, § 6.4]) существует последовательность простых случайных величин $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$E|||\kappa_n - \kappa|||_2^2 \downarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку $\mathbb{P}(\Omega) = 1 < \infty$, то

$$E|||\kappa_n - \kappa|||_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда по неравенству Чебышёва для действительной случайной величины $\xi \geqslant 0$ (доказательство см. в [12; гл. II, § 6.7])

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E\xi}{\varepsilon} \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0$$

имеет место сходимость по $\mathbb{P}$-мере

$$|||\kappa_n - \kappa|||_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда из последовательности $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\kappa_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$, сходящуюся почти наверное к κ при $l \to \infty$ (см. доказательство теоремы 5 в [12; гл. II, § 10.5]). Из теоремы 2 в [1] и (3.4), (3.5) сразу следует оценка непрерывной зависимости решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geqslant 0$, (3.3) от случайных начальных данных: для любых $t \geqslant 0$ и действительной случайной величины $R(\omega) \geqslant 0$ существует такая случайная величина $C(\omega, t, R(\omega)) \geqslant 0$, что почти наверное имеет место оценка

$$|||u(t, x, \omega, s, u_s^{\mathrm{I}}) - u(t, x, \omega, s, u_s^{\mathrm{II}})|||_2 \leqslant C(\omega)|||u_s^{\mathrm{I}} - u_s^{\mathrm{II}}|||_2, \tag{3.10}$$

где F_s-измеримые случайные величины u_s^{I}, u_s^{II} принадлежат пространству H^2 почти наверное и $|||u_s^{\mathrm{I}}|||_2$, $|||u_s^{\mathrm{II}}|||_2 \leqslant R$ почти наверное. Поскольку сходящаяся последовательность ограничена, то из (3.10) получим, что в норме пространства H^2 имеет место сходимость почти наверное

$$u(t, x, \omega, s, \kappa_{n_l}) \to u(t, x, \omega, s, \kappa) \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Учитывая, что $\psi \in C_b(H^2)$, из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий получим справедливость равенства (3.8).

Рассмотрим общий случай, когда κ – произвольная $\sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0))|\sigma_{H^2}$-измеримая случайная величина. Заметим, что κ можно аппроксимировать при $n \to \infty$ в норме пространства H^2 случайными величинами

$$\widetilde{\kappa}_n = \begin{cases} \kappa, & \text{если} \quad |||\kappa|||_2 \leqslant n, \\ 0, & \text{если} \quad |||\kappa|||_2 > n, \end{cases}$$

для которых выполнено $E\|\|\widetilde{\kappa}_n\|\|_2^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, и, следовательно, имеет место (3.8). Тогда в силу (3.10), учитывая, что сходящаяся последовательность ограничена, получаем, что в норме пространства H^2 имеет место сходимость

$$u(t, x, \omega, s, \widetilde{\kappa}_n) \to u(t, x, \omega, s, \kappa) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому в силу того, что $\psi \in C_b(H^2)$, и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий равенство (3.8) выполнено в общем случае.

Феллеровость. Феллеровость получаем из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий, учитывая определение 4, оценку (3.10) и эквивалентность определений предела по Гейне и Коши.

Однородность. Из определения 5 следует, что достаточно показать, что случайные величины $u(t, x, \omega, s, \vartheta)$ и $u(t-s, x, \omega, 0, \vartheta)$ одинаково распределены для всех $\vartheta \in H^2$ и $t > s \geqslant 0$. Действительно, как уже было показано, используя (3.4), (3.5), получаем, что

$$\widetilde{u}(t-s, x, \omega, 0, \vartheta) = u(t, x, \omega, s, \vartheta)$$

является решением задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) при $u_0 = \vartheta$ в точке $t - s$ с белым шумом, у которого вместо $\{\beta_i(t-s, \omega)\}_{i=1}^{\infty}$ будем иметь $\{\widetilde{\beta}_i(t-s, \omega)\}_{i=1}^{\infty}$. При этом $\beta_i(t-s, \omega)$ и $\widetilde{\beta}_i(t-s, \omega)$ одинаково распределены для всех $i = 1, 2, \dots$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим марковскую полугруппу однородного марковского процесса[2], указанного в теореме 1,

$$P_t\psi(\vartheta) = P_{0t}\psi(\vartheta) = \int_{H^2} \psi(\theta) P(t, \vartheta, d\theta), \qquad \psi \in C_b(H^2), \quad \vartheta \in H^2, \quad t \geqslant 0,$$

где операторы $\{P_{0t}\}_{t\geqslant 0}$ из (3.6) и $P(t, \vartheta, \cdot)$, $t \geqslant 0$, – это переходная функция из определения 5. Учитывая феллеровость, получаем, что для всех $\psi \in C_b(H^2)$ выполнено включение $P_t\psi \in C_b(H^2)$. Тогда в силу того, что $\mathscr{P}(H^2)$ является подмножеством в $C_b^*(H^2)$, можно рассмотреть сопряженную полугруппу, определяемую равенством

$$\int_{H^2} \psi \, d(P_t^*\mu) = \int_{H^2} P_t\psi \, d\mu, \qquad \psi \in C_b(H^2), \quad \mu \in \mathscr{P}(H^2), \quad t \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает

$$P_t^*\mu(\Gamma) = \int_{H^2} P(t, \vartheta, \Gamma)\, \mu(d\vartheta), \qquad \mu \in \mathscr{P}(H^2), \quad \Gamma \in \sigma_{H^2}, \quad t \geqslant 0.$$

Определение 6. Меру $\mu \in \mathscr{P}(H^2)$ будем называть *стационарной мерой для системы* (1.1), (1.2), если

$$P_t^*\mu = \mu, \qquad t \geqslant 0.$$

[2]Свойства этой полугруппы см., например, в [17; гл. II, § 1, полугруппа, связанная с однородным марковским процессом].

§ 4. Существование стационарной меры

В этом параграфе будут получены условия на параметры и правую часть системы (1.1), (1.2), достаточные для существования стационарной меры.

Вначале получим одну оценку на решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1).

Теорема 2. *Пусть* α, β *– произвольные вещественные числа такие, что*

$$\alpha \in [0,(2-\beta)\nu), \qquad \beta \in (0,2). \tag{4.1}$$

Тогда для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geqslant 0$ *таких, что выполнено неравенство*

$$\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle \geqslant -\alpha|||\psi|||_3^2 \quad \text{для любого} \quad \psi \in H^3, \tag{4.2}$$

$\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, F_0*-измеримых случайных вектор-функций* $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ *и* $u_0 \in L_2(\Omega; H^2)$ *решение* $u(t)$, $t \geqslant 0$, *задачи Коши* (1.1), (1.2), (3.1), (3.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} &E|||A_1u(t)|||_0^2 + ((2-\beta)\nu - \alpha)E\int_0^t |||u(s)|||_3^2\,ds \\ &\qquad \leqslant E|||A_1u_0|||_0^2 + t\biggl(\mathrm{b} + \frac{(2+\gamma)^2}{4\beta\nu}E|||f|||_{-1}^2\biggr) \end{aligned} \tag{4.3}$$

при $t \geqslant 0$, *где* $\mathrm{b} = \|\{b_i\}_{i=1}^{\infty}\|_{l_2}$.

Доказательство. Заметим, что предлагаемая схема доказательства теоремы является аналогом схемы доказательства предложения 2.4.8 из [18; гл. II, § 4.2], где доказывается похожий результат для решения уравнения Навье–Стокса по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе с условием того, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентную вектор-функцию по переменным x.

Введем следующее определение процесса Ито с постоянной диффузией в сепарабельном гильбертовом пространстве из [18; гл. VII, § 7, определение 7.7.1].

Определение 7. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, будем называть *процессом Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве* H *с постоянной диффузией*, если он может быть представлен в виде

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t h(s)\,ds + \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(t)\upsilon_i, \qquad t \geqslant 0,$$

где равенство имеет место почти наверное, последовательность $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\upsilon_i\|_H^2 < \infty$$

и $h(t)$, $t \geqslant 0$, – это H-значный прогрессивно измеримый по отношению к $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ случайный процесс такой, что

$$\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T \|h(t)\|_H^2\,dt < \infty \quad \text{для любого } T > 0\biggr\} = 1.$$

Обозначим

$$h(t) = f - (\nu A_2 + A_3)u(t) - B(u(t)), \qquad t \geqslant 0.$$

В следствии 1 из [1] показано, что случайный процесс $u(t)$, $t \geqslant 0$, является прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$. Тогда ввиду того, что f F_0-измеримо, случайный процесс $h(t)$, $t \geqslant 0$, является H^{-1}-значным прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$. Поэтому случайный процесс $A_1 u(t)$, $t \geqslant 0$, представляет собой процесс Ито в H^{-1} с постоянной диффузией, так как в силу (1.1), (1.2), (3.1), (3.2) его можно представить в виде

$$A_1 u(t) = A_1 u_0 + \int_0^t h(t)\,dt + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t) E_i \quad \text{почти наверное}, \qquad t \geqslant 0,$$

причем случайный процесс $h(t)$, $t \geqslant 0$, ввиду способа построения решения $u(t)$, $t \geqslant 0$, и оценок (3.31), (3.32) из [1; § 3] удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T |||h(t)|||_{-1}^2\,dt < \infty \quad \text{для любого } T > 0\biggr\} = 1.$$

Для дальнейшего изложения доказательства теоремы 2 нам будет необходима формула Ито (замены переменной в стохастическом дифференциальном уравнении) для гильбертовых пространств. Ниже будет приведена лемма, формулировка которой сразу следует из формулировки теоремы 7.7.5, доказанной в [18; гл. VII, § 7].

Лемма 5. *Пусть H, V – сепарабельные гильбертовы пространства, H^* и V^* – сопряженные пространства с пространствами соответственно H и V, V плотно непрерывно вложено в H. Отождествляя по теореме Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве* (*см., например*, [5; гл. III, § 6]) *сопряженное пространство H^* с пространством H, имеем*

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

Пусть $\Phi\colon H \to \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая по Фреше функция, равномерно непрерывная вместе со своими производными $\Phi_\vartheta(\vartheta)$ первого и $\Phi_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)$ второго порядков по $\vartheta \in H$ на любом ограниченном множестве пространства H.

Будем полагать, что функция Φ удовлетворяет следующим условиям:

a) *существует положительная непрерывная функция $C(r)$, $r > 0$, такая, что*

$$|\Phi_\vartheta(\vartheta; \upsilon)| \leqslant C(\|\vartheta\|_H)\|\vartheta\|_V\|\upsilon\|_{V^*}, \qquad \vartheta \in V, \quad \upsilon \in H;$$

b) *для любой последовательности $\{\vartheta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$, сходящейся к $\vartheta \in V$ при $k \to \infty$ в топологии пространства V, и для любого $\upsilon \in V^*$ имеет место сходимость*

$$\Phi_\vartheta(\vartheta_k; \upsilon) \to \Phi_\vartheta(\vartheta; \upsilon) \quad \text{при} \ \ k \to \infty.$$

Заметим, что в силу условия a) *линейный непрерывный оператор* $\Phi_\vartheta(\vartheta)$, *определенный на пространстве* H, *допускает единственное непрерывное расширение на пространство* V^* *для любого* $\vartheta \in V$ *и неравенство в условии* a) *будет выполнено для* $\upsilon \in V^*$.

Предположим, что случайный процесс $\xi(t)\colon \Omega \to H$, $t \geqslant 0$, *удовлетворяет следующим условиям*:

c) *почти все траектории случайного процесса* $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, *принадлежат пространству* $C(\mathbb{R}^+; H) \cap L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; V)$;

d) $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – *процесс Ито в пространстве* V^* *с постоянной диффузией такой, что в определении* 7 *последовательность* $\{\upsilon_i\}_{i=1}^\infty$ *лежит в пространстве* H (*а не в* V^*) *и*

$$\sum_{i=1}^\infty \|\upsilon_i\|_H^2 < \infty.$$

Тогда почти наверное при $t \geqslant 0$ *имеет место формула Ито*

$$\Phi(\xi(t\wedge\tau_n(\xi))) = \Phi(\xi(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n(\xi)} \Theta_0(s)\,ds + \sum_{i=1}^\infty \int_0^{t\wedge\tau_n(\xi)} \Theta_i(s)\,d\beta_i(s),$$

где

$$\Theta_0(t) = \Phi_u(\xi(t); h(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty \Phi_{uu}(\xi(t); \upsilon_i),$$

$$\Theta_i(t) = \Phi_u(\xi(t); \upsilon_i), \qquad i = 1, 2, \dots,$$

$$\tau_n(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \|\xi(t)\|_H > n\}, \qquad t\wedge\tau_n(\xi) = \min\{t, \tau_n(\xi)\}, \qquad n = 0, 1, \dots .$$

В лемме 5 рассмотрим пространства $H = H^0$ и $V = H^1$, функционал $\Phi(\vartheta) = |||\vartheta|||_0^2$ и в качестве случайного процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, возьмем процесс Ито с постоянной диффузией $A_1 u(t)$. Нетрудно показать, что в силу леммы 3 из [1] выполнено равенство

$$\langle B\psi, A_1\psi\rangle = 0 \quad \text{для любого} \quad \psi \in H^3.$$

Тогда, учитывая равенство (2.2), неравенство (2.3),

$$\Phi_\vartheta(\vartheta; \upsilon) = 2\langle \vartheta, \upsilon\rangle, \quad \Phi_{\vartheta\vartheta}(\vartheta; \upsilon) = 2|||\upsilon|||_0^2, \qquad \vartheta, \upsilon \in H^0,$$

и включение $u(t) \in \varkappa$ почти наверное, где $\varkappa$ – пространство (2.4), с помощью формулы Ито получим равенство

$$|||A_1 u(t\wedge\tau_n)|||_0^2 = |||A_1 u_0|||_0^2 + \int_0^{t\wedge\tau_n} \bigl(2\langle f - (\nu A_2 + A_3)u(s), A_1 u(s)\rangle + \mathrm{b}\bigr)\,ds$$
$$+ 2\sum_{i=1}^\infty b_i \int_0^{t\wedge\tau_n} \langle E_i, A_1 u(s)\rangle\,d\beta_i(s) \quad \text{почти наверное},$$

причем здесь и везде ниже $\tau_n = \tau_n(A_1 u)$. Отсюда и из оценок (4.2) и

$$|||\psi|||_3^2 \leqslant \langle A_2\psi, A_1\psi\rangle \quad \text{для любого} \;\; \psi \in H^3$$

(см. [1; неравенство (3.23)]) будем иметь

$$\begin{aligned}
&|||A_1u(t\wedge\tau_n)|||_0^2+(2\nu-\alpha)\int_0^{t\wedge\tau_n}|||u(s)|||_3^2\,ds\\
&\qquad\leqslant |||A_1u_0|||_0^2+\int_0^{t\wedge\tau_n}(2\langle f,A_1u(s)\rangle+\mathrm{b})\,ds\\
&\qquad\qquad+2\sum_{i=1}^{\infty}b_i\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i,A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)\quad\text{почти наверное.}
\end{aligned}$$

Взяв от обеих частей этого неравенства математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned}
&E|||A_1u(t\wedge\tau_n)|||_0^2+(2\nu-\alpha)E\int_0^{t\wedge\tau_n}|||u(s)|||_3^2\,ds\\
&\qquad\leqslant E|||A_1u_0|||_0^2+2E\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle f,A_1u(s)\rangle\,ds+\mathrm{b}E(t\wedge\tau_n)\\
&\qquad\qquad+2E\sum_{i=1}^{\infty}b_i\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i,A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s).
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Докажем, что

$$E\sum_{i=1}^{\infty}b_i\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i,A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)=0.\tag{4.5}$$

Напомним определение марковского момента из [19; гл. I, § 5, определение 5.3].

Определение 8. Отображение $\tau\colon\Omega\to[0,\infty]$ назовем *марковским моментом относительно фильтрации* $\{F_t\}_{t\geqslant0}$, если для каждого $t\geqslant0$ имеет место включение $\{\omega\in\Omega\colon\tau(\omega)\leqslant t\}\in F_t$.

В примере 5.1 из [19; гл. I, § 5] доказано, что, если $M\subset\mathbb{R}$ – произвольное открытое множество, $\xi(t)\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $t\geqslant0$, – непрерывный справа согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t\geqslant0}$ случайный процесс, то случайная величина

$$\inf\{t\geqslant0:\xi(t)\in M\}$$

является марковским моментом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant0}$. Тогда очевидно, что τ_n – марковский момент относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant0}$.

В дальнейшем нам будут необходимы два свойства стохастических интегралов. Пусть $\psi(t)$, $t\geqslant0$, – действительный измеримый случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t\geqslant0}$, и для любого $T>0$

$$E\biggl(\int_0^T\psi^2(s)\,ds\biggr)<\infty.$$

Тогда если τ – марковский момент, $\beta(t,\omega)$, $t\geqslant0$, – действительное броуновское движение, определенное на вероятностном пространстве $(\Omega,F,\mathbb{P})$, относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$, то выполнены следующие два свойства (см., например, доказательства равенств (1.13) и (1.16) из [19; гл. II, § 1]):

$$E\int_0^{t\wedge\tau}\psi(s)\,d\beta(s)=0, \tag{4.6}$$

$$E\biggl(\int_0^{t\wedge\tau}\psi(s)\,d\beta(s)\biggr)^2=E\int_0^{t\wedge\tau}\psi^2(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Заметим, что в силу теоремы о монотонной сходимости, неравенства Бесселя, равенства (4.7) при $\tau=\tau_n$, оценки

$$|||A_1u(s)|||_0\leqslant n, \qquad 0\leqslant s\leqslant t\wedge\tau_n,$$

случайная величина

$$\sum_{i=1}^{\infty}\biggl(\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)\biggr)^2$$

имеет конечное математическое ожидание. Значит, в силу неравенства Коши–Буняковского конечное математическое ожидание имеет и величина

$$\biggl(\sum_{i=1}^{\infty}\biggl(\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)\biggr)^2\biggr)^{1/2}.$$

Поскольку абсолютную величину частичных сумм ряда в (4.5) можно по неравенству Коши–Буняковского для пространства $\mathbb{R}^N$ оценить интегрируемой случайной величиной

$$\biggl|\sum_{i=1}^{N}b_i\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)\biggr|\leqslant \mathrm{b}\biggl(\sum_{i=1}^{\infty}\biggl(\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)\biggr)^2\biggr)^{1/2},$$

где $N=1,2,\dots$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий справедливо

$$E\sum_{i=1}^{\infty}b_i\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)=\sum_{i=1}^{\infty}b_iE\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s).$$

Учитывая, что в силу (4.6) при $\tau=\tau_n$ имеем

$$E\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle E_i, A_1u(s)\rangle\,d\beta_i(s)=0, \qquad i=1,2,\dots,$$

отсюда получим равенство (4.5).

В силу неравенства (4.4) и равенства (4.5) будем иметь

$$\begin{aligned}E|||A_1u(t\wedge\tau_n)|||_0^2+(2\nu-\alpha)E\int_0^{t\wedge\tau_n}|||u(s)|||_3^2\,ds\\ \leqslant E|||A_1u_0|||_0^2+2E\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle f, A_1u(s)\rangle\,ds+\mathrm{b}E(t\wedge\tau_n).\end{aligned}$$

Поскольку $u(t) \in C(\mathbb{R}^+; H^2)$ почти наверное, то $\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ почти наверное. Следовательно, переходя к пределу в последнем неравенстве и используя теорему о монотонной сходимости и лемму Фату (см., например, [12; гл. II, § 6.4, теоремы 1, a), и 2, a)]), получим

$$E|||A_1 u(t)|||_0^2 + (2\nu - \alpha)E\int_0^t |||u(s)|||_3^2\,ds \\ \leqslant E|||A_1 u_0|||_0^2 + 2E\int_0^t \bigl|\langle f, A_1 u(s)\rangle\bigr|\,ds + \mathrm{b}t.$$

Справедливо неравенство

$$\|\psi\|_p \leqslant 2^{-(q-p)/2}\|\psi\|_q \quad \text{для любого} \quad \psi \in h^q, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > p$$

(см. неравенство (16) в [20]). Поэтому в силу определения оператора A_1 и (2.2)

$$|||A_1\psi|||_1^2 = \langle A_1^2\psi, A_0\psi\rangle = |||\psi|||_3^2 + 2\gamma\|\psi_2\|_2^2 + \gamma^2\|\psi_2\|_1^2 \leqslant \biggl(1 + \frac{\gamma}{2}\biggr)^2 |||\psi|||_3^2$$

для любого $\psi \in H^3$. Тогда вследствие неравенства

$$2\bigl|\langle f, A_1 u(s)\rangle\bigr| \leqslant \frac{4\beta\nu}{(2+\gamma)^2}|||A_1 u(s)|||_1^2 + \frac{(2+\gamma)^2}{4\beta\nu}|||f|||_{-1}^2,$$

которое имеет место в силу (2.3), $p = 1$, и очевидного неравенства

$$2ab \leqslant a^2c^2 + b^2c^{-2}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0,$$

справедливо (4.3).

Теорема 2 доказана.

Неявное условие (4.2) из теоремы 2 можно заменить на следующее явное условие.

Лемма 6. *Условие* (4.2) *эквивалентно следующему условию на константы* ν, γ, ρ, k, k_1:

$$k \leqslant \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Bigl(3\alpha j^3(i) + 2\alpha\gamma j^2(i) + \chi(j(i)) \\ + \sqrt{\bigl(3\alpha j^3(i) + 2\alpha\gamma j^2(i) + \chi(j(i))\bigr)^2 + (j(i)-\gamma)^2\bigl(\alpha^2 j^4(i) + \alpha j(i)\chi(j(i))\bigr)}\Bigr), \tag{4.8}$$

где

$$\chi(y) = (k_1 + \nu\gamma)(y^2 + \gamma y) + \rho(\gamma + y), \quad j(y) = y(y+1), \qquad y \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Везде ниже будем считать, что если $j(p) = \gamma$, p – натуральное число, то

$$\frac{1}{(j(p)-\gamma)^2} = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\psi \in H^3$. По определению операторов A_1 и A_3 из равенства (2.2) получим

$$\begin{aligned}\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\Delta\psi_1 \\ -\Delta\psi_2 + \gamma\psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k\Delta\psi_1 + 2k\Delta\psi_2 \\ k\Delta\psi_1 - (2k + k_1 + \nu\gamma)\Delta\psi_2 + \rho\psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= k\|\psi_1\|_2^2 - 3k(\Delta\psi_1, \Delta\psi_2) + \gamma k(\Delta\psi_1, \psi_2) + (2k + k_1 + \nu\gamma)\|\psi_2\|_2^2 \\ &\quad + (\rho + \gamma(2k + k_1 + \nu\gamma))\|\psi_2\|_1^2 + \gamma\rho\|\psi_2\|_0^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Разложим функции $\psi_1, \psi_2 \in h^3$ по ортонормированному базису $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства $h^0 \supset h^3$, состоящему из собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [10; гл. XIII] и [7; § 31]):

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{1i}e_i, \qquad \|\psi_1\|_3^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{1i}^2\lambda_i^3 < \infty,$$

$$\psi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}e_i, \qquad \|\psi_2\|_3^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}^2\lambda_i^3 < \infty,$$

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера}, \qquad i, j = 1, 2, \dots .$$

Здесь $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами с учетом их кратностей. Если $\alpha > 0$, то из равенства (4.10) имеем

$$\begin{aligned}&\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle + \alpha|||\psi|||_3^2 \\ &\quad= \sum_{i=1}^{\infty} c_{1i}^2\lambda_i^2(k + \alpha\lambda_i) - 2\sum_{i=1}^{\infty} c_{1i}\lambda_i\sqrt{k + \alpha\lambda_i}\,c_{2i}\frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha\lambda_i}} \\ &\qquad+ \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}^2\big((\lambda_i^2 + \gamma\lambda_i)(2k + k_1 + \nu\gamma) + \rho(\gamma + \lambda_i) + \alpha\lambda_i^3\big) \\ &\quad= \sum_{i=1}^{\infty}\left(c_{1i}\lambda_i\sqrt{k + \alpha\lambda_i} - c_{2i}\frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha\lambda_i}}\right)^2 \\ &\qquad+ \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}^2\left((\lambda_i^2 + \gamma\lambda_i)(2k + k_1 + \nu\gamma) + \rho(\gamma + \lambda_i) + \alpha\lambda_i^3 - \left(\frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha\lambda_i}}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ψ нетрудно получить, что неравенство (4.2) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$(2k + k_1 + \nu\gamma)(\lambda_i^2 + \gamma\lambda_i) + \rho(\gamma + \lambda_i) + \alpha\lambda_i^3 - \left(\frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha\lambda_i}}\right)^2 \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \dots . \tag{4.11}$$

Заметим, что множество собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами состоит из неотрицательных целых чисел вида $i(i + 1)$, $i = 0, 1, \dots$ (см., например, [7; § 31]). При этом поскольку для функций из пространства h^0 выполнено (2.1), то в ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства h^0 нет собственной функции, отвечающей нулевому собственному значению. Поэтому, анализируя квадратное неравенство относительно k, получим, что неравенство (4.11) эквивалентно неравенству (4.8). Тогда условие (4.2) эквивалентно условию (4.8).

Если $\alpha = 0$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим, что условие (4.2) эквивалентно условию (4.8) при $\alpha = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Если константы ν, γ, ρ, k, k_1 удовлетворяют условию*

$$k < \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Big(6\nu j^3(i) + 4\nu\gamma j^2(i) + \chi(j(i)) + \sqrt{\big(6\nu j^3(i) + 4\nu\gamma j^2(i) + \chi(j(i))\big)^2 + (j(i)-\gamma)^2\big(4\nu^2 j^4(i) + 2\nu j(i)\chi(j(i))\big)}\,\Big), \tag{4.12}$$

где функции χ и j определены в (4.9), то существуют такие α и β, что выполнено (4.1) и (4.2).

Доказательство. Если

$$k \leqslant \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\chi(j(i))}{(j(i)-\gamma)^2},$$

то положим $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Тогда такие α, β удовлетворяют (4.1) и в силу леммы 6 будет выполнено (4.2). Если

$$k > \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\chi(j(i))}{(j(i)-\gamma)^2}$$

и k удовлетворяет неравенству (4.12), то в силу непрерывности функции

$$\psi(\alpha) = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Big(3\alpha j^3(i) + 2\alpha\gamma j^2(i) + \chi(j(i)) + \sqrt{\big(3\alpha j^3(i) + 2\alpha\gamma j^2(i) + \chi(j(i))\big)^2 + (j(i)-\gamma)^2\big(\alpha^2 j^4(i) + \alpha j(i)\chi(j(i))\big)}\,\Big)$$

существует такое α_*, что $k = \psi(\alpha_*)$, $0 < \alpha_* < 2\nu$. Положим $\alpha = \alpha_*$ и $\beta = (2\nu - \alpha_*)/(2\nu)$. Тогда такие α, β удовлетворяют (4.1) и в силу леммы 6 будет выполнено (4.2).

Лемма доказана.

В следующей теореме доказывается результат о существовании стационарной меры для системы (1.1), (1.2).

Теорема 3. *Для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geqslant 0$ таких, что выполнено неравенство (4.12), $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$ и F_0-измеримой случайной вектор-функции $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ существует стационарная мера для системы (1.1), (1.2).*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), (3.1). Пусть $u_0 = 0$. В силу леммы 7 и теоремы 2 имеет место неравенство

$$E\int_0^t |||u(s)|||_3^2\,ds \leqslant ct,$$

где $c > 0$ – константа, не зависящая от t, x и u. Тогда дальнейшее доказательство сразу следует из доказательства теоремы 2.5.5 в [18; гл. II, § 5.2].

Заметим, что стационарная мера по известной формуле Крылова–Боголюбова в силу $\mathscr{P}(H^2) \subset C_b^*(H^2)$ является предельной точкой в смысле *-слабой сходимости множества вероятностных мер (см., например, [18; гл. II, § 5])

$$\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}(u(s) \in \,\cdot\,)\,ds\right\}_{t>0}.$$

Теорема 3 доказана.

На практике удобно вместо неравенства (4.12) пользоваться чуть более грубой оценкой.

Следствие 1. *Утверждение теоремы 3 выполнено, если вместо неравенства (4.12) имеет место неравенство*

$$k < 2\Bigl(\varkappa_1 + \sqrt{\varkappa_1^2 + 2\nu\varkappa_2}\Bigr), \tag{4.13}$$

где

$$\varkappa_1 = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\nu(3+\gamma)j(i)^2 + \chi(j(i))}{(j(i)-\gamma)^2}, \tag{4.14}$$

$$\varkappa_2 = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{(8\nu + (k_1 + \nu\gamma)(2+\gamma) + \rho)j(i)^2 + \rho\gamma j(i)}{(j(i)-\gamma)^2}, \tag{4.15}$$

функции χ и j определены в (4.9).

Доказательство сразу следует из того, что правая часть неравенства (4.13) меньше или равна правой части неравенства (4.12).

Замечание 1. Заметим, что функции, от которых берутся инфинумы в (4.14) и (4.15), представляют собой дроби, в которых числитель и знаменатель являются многочленами второй степени по $j(i)$. Поэтому, переходя к непрерывной переменной, каждую такую функцию можно представить в виде

$$z(y) = a + \frac{by + c}{(y-\gamma)^2} = a + z_*(y), \qquad y \in [2,\infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}),$$

где a, b, c – некоторые вещественные константы. При этом

$$\lim_{y\to\gamma} z(y) = +\infty,$$

если $\gamma \geqslant 2$.

Функция $z_*(y)$ является непрерывно дифференцируемой при

$$y \in [2,\infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\gamma\})$$

и поэтому ее нетрудно при заданных параметрах системы (1.1) исследовать на наличие локальных экстремумов. Очевидно, что существует не более одного локального экстремума, и для точки, в которой он достигается, можно указать точную формулу. Причем интервалы, на которые точка локального экстремума (при условии ее существования) и точка γ разобьют $[2, \infty)$, будут участками монотонности функции. Поэтому

$$\inf_{i=1,2,\dots} z(j(i)) = \min\Big\{ z(2), \lim_{y\to\infty} z(y), z(j(i_*)), z(j(i_*+1)) \Big\},$$

где i_* – такое натуральное число, что $[j(i_*), j(i_*+1))$ – интервал, содержащий точку локального минимума $z_*(y)$, если она существует при

$$y \in [2, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}).$$

Таким образом, можно указать точный алгоритм проверки условия (4.13).

Для некоторых режимов циркуляции атмосферы выполнено неравенство $k \leqslant 4k_1$ (см., например, [21]). Тогда неравенство (4.12) можно упростить.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3, за исключением неравенства* (4.12), *и дополнительно*

$$k \leqslant 4k_1.$$

Если при $\gamma \neq 2$ вместо (4.12) *имеет место неравенство*

$$k < \frac{2}{(2-\gamma)^2}\Big(16\nu(3+\gamma) + \chi(2) + \sqrt{\big(16\nu(3+\gamma)+\chi(2)\big)^2 + 4\nu(2-\gamma)^2(16\nu+\chi(2))}\,\Big),$$

где функция χ определена в (4.9), *то справедливо утверждение теоремы* 3.

Если $\gamma = 2$, то для выполнения утверждения теоремы 3 *достаточно одного неравенства $k \leqslant 4k_1$.*

Доказательство. Заметим, что в силу $k \leqslant 4k_1$ в неравенстве (4.11), домноженном на $4(k+\alpha\lambda_i)$, коэффициенты перед λ_i, λ_i^2, λ_i^3, λ_i^4 будут неотрицательными. Поэтому в (4.8) и (4.12) инфинум достигается при $i = 1$. Отсюда по теореме 3 сразу получим утверждение следствия 2.

Следствие доказано.

Заметим, что в [22; гл. VI, § 1] и [23] рассматривалась немного другая двухслойная модель бароклинной атмосферы на единичной двумерной сфере S с центром в нуле. Система уравнений этой модели после обезразмеривания отличается от системы (1.1) только оператором A_3. А именно, в [22; гл. VI, § 1] и [23] оператор A_3 имел следующий вид:

$$\widehat{A}_3 = \begin{pmatrix} -k\Delta & k\Delta \\ k\Delta & -(k+k_1)\Delta + \rho \end{pmatrix}.$$

Для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$, справедлив следующий результат о существовании стационарной меры.

Теорема 4. *Для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geqslant 0$ таких, что выполнено неравенство*

$$k < \frac{2}{\gamma^2}\Big(\varkappa_3 + 8\nu(2+\gamma) + \sqrt{(\varkappa_3 + 8\nu(2+\gamma))^2 + 4\nu\gamma^2\varkappa_3}\,\Big),$$
$$\varkappa_3 = 2k_1(2+\gamma) + \rho(2+\gamma) + 16\nu,$$

$\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$ *и F_0-измеримой случайной вектор-функции $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ существует стационарная мера для системы* (1.1), (1.2), *где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$.*

Заметим, что, сделав замену $\widehat{u}_1 = u_1$, $\widehat{u}_2 = -u_2$ в системе (1.1) с оператором $\widetilde{A}_3$ из [1; замечание 3], мы получим систему (1.1), где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$. Поэтому, учитывая замечание 3 из [1], получаем, что доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 3. Отметим лишь, что, как нетрудно показать, в аналоге неравенства (4.12) для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$, в знаменателе дроби, от которой берется точная нижняя грань, не содержится собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами $j(i)$. При этом числитель этой дроби является неубывающей функцией по $j(i)$. Таким образом, точная нижняя грань достигается в собственном значении $j(1) = 2$.

В [22; гл. III] рассматривалось следующее уравнение модели баротропной атмосферы, заданное на двумерной единичной сфере S с центром в нуле:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \nu\Delta^2 u - k\Delta u + J(\Delta u + 2\mu, u) = g, \qquad t > 0, \tag{4.16}$$

где $u(t,x)$ – неизвестная функция и $g(t,x)$ – детерминированная внешняя сила. Рассмотрим в качестве правой части (4.16) случайную функцию

$$g = f + \eta, \tag{4.17}$$

где случайная внешняя сила $f(x,\omega)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega; h^{-1})$, белый шум по t имеет вид

$$\eta(t,x,\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\zeta(t,x,\omega), \qquad \zeta(t,x,\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i(t,\omega)e_i,$$

$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства h^0, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_i(t,\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, $t \geqslant 0$, – последовательности из (3.2). Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3, и учитывая замечание 4 из [1] (англ. пер.), получим, что для уравнения (4.16), (4.17) справедлив следующий результат о существовании стационарной меры.

Теорема 5. *Для любых $\nu > 0$, $k \geqslant 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$ и F_0-измеримой случайной функции $f \in L_2(\Omega; h^{-1})$ существует стационарная мера для уравнения* (4.16), (4.17).

Замечание 2. Пусть в условиях теорем 3–5, следствиях 1 и 2 внешняя сила f не зависит от ω и $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathbf{0}$. Тогда следующие утверждения:

– утверждения теоремы 3 и следствий 1, 2 для детерминированной системы (1.1), (1.2);

– утверждение теоремы 4 для детерминированной системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$;

– утверждение теоремы 5 для детерминированного уравнения (4.16), (4.17);

для систем состоят в том, что существует *инвариантная мера* $\mu \in \mathscr{P}(H^2)$:

$$\mu(\{u_0 \in H^2 : u(t,x,u_0) \in \Gamma\}) = \mu(\Gamma) \quad \text{для любых} \ \ \Gamma \in \sigma_{H^2} \ \ \text{и} \ \ t \geqslant 0,$$

и аналогично – для уравнения.

Список литературы

[1] Ю. Ю. Клевцова, “О корректности задачи Коши для стохастической системы модели Лоренца бароклинной атмосферы”, *Матем. сб.*, **203**:10 (2012), 117–144; англ. пер.: Yu. Yu. Klevtsova, “Well-posedness of the Cauchy problem for the stochastic system for the Lorenz model for a baroclinic atmosphere”, *Sb. Math.*, **203**:10 (2012), 1490–1517.

[2] Б. В. Пальцев, *Сферические функции*, Учебно-методическое пособие, МФТИ, М., 2000.

[3] В. П. Дымников, *Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов*, ИВМ РАН, М., 2007.

[4] М. С. Агранович, “Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы”, *УМН*, **20**:5 (1965), 3–120; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Elliptic singular integro-differential operators”, *Russian Math. Surveys*, **20**:5 (1965), 1–121.

[5] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.

[6] Ю. Н. Скиба, *Математические вопросы динамики вязкой баротропной жидкости на вращающейся сфере*, ОВМ АН СССР, М., 1989.

[7] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford–London–New York, 1965.

[8] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Гостехиздат, М.–Л., 1952; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *The problem of the minimum of a quadratic functional*, Holden-Day, San Francisco–London–Amsterdam, 1965.

[9] С. Г. Михлин, “Дифференцирование рядов по сферическим функциям”, *Докл. АН СССР*, **126**:2 (1959), 278–279.

[10] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.

[11] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005.

[12] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, т. 1: *Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы*, МЦНМО, М., 2004; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996.

[13] O. Knill, *Probability theory and stochastic processes with applications*, Overseas Press, New Delhi, 2009.

[14] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia Math. Appl., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[15] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, ГИФМЛ, М., 1961; англ. пер.: I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, v. 4: *Applications of harmonic analysis*, Academic Press, New York–London, 1964.

[16] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; англ. пер.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 1, Academic Press, New York–London, 1966.

[17] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 2, Наука, М., 1973; англ. пер.: I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *The theory of stochastic processes*, v. II, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.

[18] S. Kuksin, A. Shirikyan, *Mathematics of two-dimensional turbulence*, Cambridge Tracts in Mathematics, **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[19] Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1981.

[20] Yu. N. Skiba, "Spectral approximation in the numerical stability study of nondivergent viscous flows on a sphere", *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **14**:2 (1998), 143–157.

[21] В. Н. Крупчатников, Г. П. Курбаткин, *Моделирование крупномасштабной динамики атмосферы. Методы диагноза общей циркуляции*, ВЦ, Сиб. отд-ние АН СССР, Новосибирск, 1991.

[22] В. П. Дымников, А. Н. Филатов, *Основы математической теории климата*, ВИНИТИ, М., 1994; англ. пер.: V. P. Dymnikov, A. N. Filatov, *Mathematics of climate modeling*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser, Boston, MA, 1997.

[23] А. С. Горелов, "Размерность аттрактора двуслойной бароклинной модели", *Докл. РАН*, **342**:1 (1995), 101–104; англ. пер.: A. S. Gorelov, "Dimension of the attractor for a two-layer baroclinic model", *Dokl. Earth Sciences*, **345A**:9 (1996), 1–7.

Ю. Ю. Клевцова (Yu. Yu. Klevtsova)
Сибирский региональный научно-исследовательский гидрометеорологический институт, г. Новосибирск
E-mail: yy_klevtsova@ngs.ru

Поступила в редакцию
08.10.2012 и 15.01.2013