

УДК 517.955.2

Ю. Ю. Клевцова

О корректности задачи Коши для стохастической системы модели Лоренца бароклининой атмосферы

В работе рассматривается задача Коши для одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами. Эта система описывает двухслойную квазисолеоидальную модель Лоренца бароклининой атмосферы на вращающейся двумерной сфере. Правая часть системы возмущается белым шумом, рассматриваются случайные начальные данные. Доказывается существование единственного решения и оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности начальных данных и правой части на конечном отрезке времени. Попутно доказывается для задачи Коши с детерминированными начальными данными и правой частью оценка непрерывной зависимости решения от совокупности параметров, начальных данных и правой части на конечном отрезке времени.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: двухслойная квазисолеоидальная модель Лоренца бароклининой атмосферы, возмущение белым шумом, корректность задачи Коши, случайные начальные данные.

§ 1. Введение

В работе В. Н. Крупчатникова [1] рассматривалась на единичной двумерной сфере S с центром в нуле в сферической системе координат

$$(\lambda, \varphi), \quad \lambda \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mu = \sin \varphi,$$

следующая система уравнений двухслойной квазисолеоидальной модели Лоренца бароклининой атмосферы (физические аспекты вопроса см. в [2]–[4])

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

где $\nu > 0$ – вязкость, $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$ – неизвестное векторное поле, $g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x))^T$ – детерминированная внешняя сила, $x = (\lambda, \mu)$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k\Delta & 2k\Delta \\ k\Delta & -(2k + k_1 + \nu\gamma)\Delta + \rho \end{pmatrix},$$

$$B(u) = (J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2), J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2))^T,$$

здесь параметры $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$, операторы Якоби $J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$ и Лапласа–Бельтрами (см., например, [5; § 1]) $\Delta\psi = ((1 - \mu^2)\psi_\mu)_\mu + (1 - \mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$ на сфере S . Отметим, что константы γ, ρ, k, k_1 неотрицательны, а ν положительна. В работе [1] было показано, что существует единственное обобщенное решение задачи Коши для этой системы уравнений в некоторых функциональных пространствах. Вопросы разрешимости подобного типа систем рассматривались также в работах [4], [6], и в [6; гл. II, § 3] см. ссылки в замечании 2.1.

В настоящей статье рассматривается в качестве правой части системы (1.1) случайное векторное поле, определенное на произвольном полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) ,

$$g = f + \eta, \quad (1.2)$$

где случайная внешняя сила $f(t, x, \omega) = (f_1(t, x, \omega), f_2(t, x, \omega))^T$ почти наверное является локально квадратично суммируемой по t и случайное векторное поле $\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^T$ является белым шумом по t . Для этой системы доказывается результат о существовании единственного решения задачи Коши со случайными начальными данными и оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности случайных начальных данных и внешней силы на конечном отрезке изменения переменной t . Необходимость такой стохастической постановки задачи для изучения проблемы предсказуемости климата подробно описывается в предисловии к книге В. П. Дымникова [7]. Попутно доказывается для задачи Коши с детерминированными начальными данными и правой частью оценка непрерывной зависимости решения от совокупности параметров $(\nu, \gamma, \rho, k, k_1)$, начальных данных и правой части на конечном отрезке изменения переменной t .

Автор выражает благодарность В. П. Дымникову и В. Н. Крупчатникову за постановку задачи, А. Р. Ширикяну и В. В. Нерсисяну за полезные дискуссии.

§ 2. Функциональные пространства

Везде ниже $T > 0$ любое, X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Пусть $L_p(S)$ и $L_p([0, T] \times S)$ – лебеговы пространства измеримых функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi: [0, T] \times S \rightarrow \mathbb{R}$ соответственно с конечными нормами

$$\|\psi\|_{L_p(S)} = \left(\int_S |\psi|^p dS \right)^{1/p}, \quad \|\psi\|_{L_p([0, T] \times S)} = \left(\iint_{[0, T] \times S} |\psi|^p dt dS \right)^{1/p} < \infty,$$

$1 \leq p < \infty$. При этом $L_2(S)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \theta) = \int_S \psi \theta dS.$$

Обозначим через $L_2(0, T; X)$ банахово пространство измеримых по Бохнеру функций $\psi: [0, T] \rightarrow X$, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_{L_2(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|\psi(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} < \infty,$$

и через $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^+; X)$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, пространство измеримых по Бохнеру функций $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ таких, что

$$\int_I \|\psi(t)\|_X^2 dt < \infty$$

для любого компактного промежутка $I \subset \mathbb{R}^+$. При этом функции, отличающиеся на множествах лебеговой меры нуль, отождествляются. Заметим, что если X – гильбертово пространство, то $L_2(0, T; X)$ – гильбертово пространство.

Нам будут необходимы также пространства непрерывных функций с областью значений в банаховом пространстве. Обозначим через $C(0, T; X)$ и $C(\mathbb{R}^+; X)$ пространства всех непрерывных функций $\psi: [0, T] \rightarrow X$ и $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ соответственно. Снабженное нормой

$$\|\psi\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|_X$$

пространство $C(0, T; X)$ является банаховым пространством. Снабженное метрикой

$$d(\psi, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\|\psi - \theta\|_{C(0, i; X)}}{1 + \|\psi - \theta\|_{C(0, i; X)}}$$

пространство $C(\mathbb{R}^+; X)$ является полным метрическим пространством.

Обозначим через $C^\infty(S)$ пространство таких бесконечно гладких функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$, для которых выполнено

$$\int_S \psi dS = 0.$$

Функция $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ называется бесконечно гладкой (см., например, замечание 1 к определению 1 в [5; § 2] и [8; гл. I, § 3.2]), если для любой декартовой системы координат $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ с началом координат в центре единичной сферы S функция

$$\tilde{\psi}(\varphi, \lambda) = \psi(\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, -\sin \varphi),$$

где φ и λ – углы в сферической системе координат, связанной с декартовой, принадлежит пространству $C^\infty((-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi])$.

Введем в пространстве $C^\infty(S)$ семейство норм

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^p \psi, \psi)^{1/2}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через h^p , $p \in \mathbb{Z}$, пространства, полученные пополнением (см., например, доказательство теоремы о пополнении в [9; гл. I, § 10]) по нормам $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{Z}$, пространства $C^\infty(S)$. Имеют место следующие вложения:

$$\dots \subset h^2 \subset h^1 \subset h^0 \subset h^{-1} \subset h^{-2} \subset \dots,$$

где операторы вложения компактны и непрерывны (см., например, [6; гл. I, § 3, леммы 1.1, 1.4, б) и в), 1.6]). Заметим, что h^p плотно вложено в h^q при $q < p$ (см., например, [6; гл. I, § 3, леммы 1.1, 1.4, б) и в)]).

Оператор $-\Delta$ на пространстве $C^\infty(S)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ положительно определен (см., например, [5; § 2, доказательство леммы 1, формула (22)] и [6; гл. I, § 3, лемма 1.2]). Поэтому он может быть расширен до самосопряженного по Фридрихсу (см., например, [10; § 5], [11; § 31] и [6; гл. I, § 3])

$$-\Delta: D(-\Delta) = h^{p+2} \subset h^p \rightarrow h^p, \quad p \in \mathbb{Z},$$

где $D(A)$ – область определения оператора A . Тогда положительно определен и самосопряжен оператор

$$(-\Delta)^{q/2}: D((-\Delta)^{q/2}) = h^{p+q} \subset h^p \rightarrow h^p, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0,$$

(см., например, [12], [11; § 31], [13; гл. XIII] и [6; гл. I, § 3]) и

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{p/2}\psi)^{1/2} \quad \text{для любого } \psi \in h^p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $L_2(S)$ может быть продолжено до билинейного непрерывного отображения $h^p \times h^{-p} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$,

$$(\psi, \theta) = ((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{-p/2}\theta), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

где $\psi \in h^p$, $\theta \in h^{-p}$. Тогда имеет место обобщенное неравенство Коши–Буняковского

$$|(\psi, \theta)| \leq \|\psi\|_p \|\theta\|_{-p} \quad \text{для любых } \psi \in h^p, \quad \theta \in h^{-p}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

и (см., например, доказательство [5; § 2, лемма 1] и [6; гл. I, § 3], [8; гл. I, § 4.6])

$$\|\psi\|_1^2 = (-\Delta\psi, \psi) = \|\nabla\psi\|_{L_2(S)}^2 \quad \text{для любого } \psi \in h^1, \quad (2.3)$$

где в декартовых координатах

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi, \frac{\partial}{\partial x_2}\psi, \frac{\partial}{\partial x_3}\psi \right)^T, \quad |\theta| = \langle \theta, \theta \rangle_{\mathbb{R}^n}^{1/2},$$

$\langle \theta, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n}$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Обозначим через $\{e_m^n\}_{|m| \leq n}^{1 \leq n} \in C^\infty(S)$ ортонормированный базис гильбертова пространства h^0 :

$$(e_m^n, e_i^j) = \delta_{mi}\delta_{nj},$$

$$\delta_{mi}, \delta_{nj} \text{ – символы Кронекера,} \quad n, j = 1, 2, \dots, \quad |m| \leq n, \quad |i| \leq j,$$

состоящий из собственных функций оператора $-\Delta$ (см., например, [13; гл. XIII] и [11; § 31]). Пусть $\lambda_n = n(n+1)$ – соответствующее собственным функциям $\{e_m^n\}_{|m| \leq n}$ собственное значение оператора $-\Delta$ кратности $2n+1$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что функции $\{e_m^{n,p}\}_{|m| \leq n}^{1 \leq n}$, где

$$e_m^{n,p} = \lambda_n^{-p/2} e_m^n, \quad 1 \leq n, \quad |m| \leq n,$$

являются ортонормированным базисом гильбертова пространства h^p , $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, если в нем ввести скалярное произведение

$$(\psi, \theta)_p = ((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{p/2}\theta), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Пусть $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, – пространства измеримых векторных полей $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ с нормами

$$\|\psi\|_p = \langle A_0^{p/2} \psi, A_0^{p/2} \psi \rangle^{1/2},$$

$$p \in \mathbb{Z}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \langle \psi, \theta \rangle = \int_S \langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2} dS.$$

Рассмотрим следующее векторное поле:

$$E_m^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{m-n-1}^n \end{pmatrix}, & 1 \leq m \leq 2n+1, \\ \begin{pmatrix} e_{m-3n-2}^n \\ 0 \end{pmatrix}, & 2n+2 \leq m \leq 4n+2. \end{cases}.$$

Очевидно, что $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n} \in C^\infty(S) \times C^\infty(S)$ является ортонормированным базисом гильбертова пространства H^0 :

$$\langle E_m^n, E_i^j \rangle = \delta_{mi} \delta_{nj}, \quad n, j = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq m \leq 4n+2, \quad 1 \leq i \leq 4j+2,$$

состоящим из собственных векторных полей оператора A_0 . Тогда $\lambda_n = n(n+1)$ – соответствующее собственным векторным полям $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}$ собственное значение оператора A_0 кратности $4n+2$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что векторные поля $\{E_m^{n,p}\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n}$, где

$$E_m^{n,p} = \lambda_n^{-p/2} E_m^n, \quad 1 \leq n, \quad 1 \leq m \leq 4n+2,$$

являются ортонормированным базисом гильбертова пространства H^p , где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, если в нем ввести скалярное произведение

$$\langle \psi, \theta \rangle_p = \langle A_0^{p/2} \psi, A_0^{p/2} \theta \rangle, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Введем пространства

$$\begin{aligned} \varkappa_T &= C(0, T; H^2) \cap L_2(0, T; H^3), \quad \|\psi\|_{\varkappa_T} = \|\psi\|_{C(0, T; H^2)} + \|\psi\|_{L_2(0, T; H^3)}, \\ \varkappa &= C(\mathbb{R}^+; H^2) \cap L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^3), \\ \Xi_T &= \left\{ \psi \in L_2(0, T; H^3) : \frac{\partial}{\partial t} \psi \in L_2(0, T; H^1) \right\}, \end{aligned}$$

где производная по времени понимается в смысле распределений (см., например, [14; гл. I, § 1.1] или [15; гл. I, § 1.2]). Снабженное нормой

$$\|\psi\|_{\Xi_T} = \left(\int_0^T \left(\|\psi(t)\|_3^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) \right\|_1^2 \right) dt \right)^{1/2}$$

пространство Ξ_T является гильбертовым (доказательство см., например, в [14; гл. I, § 2.2]). Пространство Ξ_T непрерывно вложено в пространство $C(0, T; H^2)$ (доказательство см., например, в [14; гл. I, § 7.3, теорема 7.7, и § 3.1, теорема 3.1] и [6; гл. I, § 3]) и, следовательно, в пространство $\varkappa_T$. Поэтому произвольное

векторное поле ψ из пространства Ξ_T является непрерывным как функция $[0, T] \rightarrow H^2$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль. В частности, при любом $t \in [0, T]$ $\psi(t)$ является векторным полем на пространстве H^2 .

Введем понятие полного вероятностного пространства (см., например, [16; гл. I, § 2 и § 4]). Пусть Ω – произвольное множество, F – некоторое семейство его подмножеств; F – σ -алгебра, если $\emptyset \in F$ и F замкнуто относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из F . Пару (Ω, F) называют *измеримым пространством*, если F – σ -алгебра подмножеств Ω . *Мерой* называют неотрицательную счетно-аддитивную функцию, определенную на некоторой σ -алгебре измеримого пространства; P – *вероятностная мера* на измеримом пространстве (Ω, F) , если $P(\Omega) = 1$. Тройку (Ω, F, P) называют *вероятностным пространством*. Под *полным* F_P σ -алгебры F по вероятностной мере P будем понимать $F \cup N_P$, где N_P – семейство подмножеств $M \subset \Omega$ таких, что существует подмножество $N \subset \Omega$, $N \in F$, что $M \subset N$ и $P(N) = 0$. Если $F_P = F$, то (Ω, F, P) – *полное вероятностное пространство*.

В дальнейшем полагаем, что (Ω, F, P) – полное вероятностное пространство.

Определим банахово пространство $L_2(\Omega; X)$ (см., например, [17; гл. II, § 10.5, теорема 7]) измеримых по Бохнеру функций $\psi: \Omega \rightarrow X$ таких, что конечна норма

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega; X)} = \sqrt{E\|\psi\|_X^2} = \left(\int_{\Omega} \|\psi\|_X^2 dP \right)^{1/2} < \infty.$$

При этом функции, отличающиеся на множествах P -меры нуль, отождествляются.

В следующих двух абзацах приведены определения из [18; гл. II, § 1, и гл. IV, § 5] и [19; гл. I, § 1.1 и § 3.3].

В пространстве (Ω, F, P) введем *фильтрацию* $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – неубывающее семейство σ -алгебр $F_s \subset F_t$, $s < t$, при этом $F_t \subset F$, $t \geq 0$. Фильтрацию $\{F_t\}_{t \geq 0}$ назовем *непрерывной справа*, если

$$\bigcap_{s > t} F_s = F_t, \quad t \geq 0.$$

Будем говорить, что фильтрация $\{F_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет *обычным условиям*, если $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – непрерывная справа фильтрация такая, что все множества P -меры нуль σ -алгебры F содержатся в F_0 .

В дальнейшем полагаем, что фильтрация $\{F_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет обычным условиям.

Наименьшую σ -алгебру, содержащую все открытые множества из X , называют *борелевской σ -алгеброй* X . Обозначим через σ_X борелевскую σ -алгебру X . Отображение $\psi: (\Omega, F) \rightarrow (X, \sigma_X)$ называют *$F|_{\sigma_X}$ -измеримым*, если $\{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \in M\} \in F$ для любого $M \in \sigma_X$. Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, *согласован с фильтрацией* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если отображение $\xi(t) F_t|_{\sigma_X}$ -измеримо при каждом $t \geq 0$. Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, *прогрессивно измерим по отношению к* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если для любого $t \geq 0$ отображение $(s, \omega) \rightarrow \xi(s, \omega)$, где $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, является $\sigma_{[0, t]} \times F_t|_{\sigma_X}$ -измеримым. Здесь $\sigma_{[0, t]} \times F_t$ – наименьшая σ -алгебра подмножеств $[0, t] \times \Omega$, содержащая все множества $M_1 \times M_2$, где $M_1 \in \sigma_{[0, t]}$ и $M_2 \in F_t$.

Введем гильбертово пространство l_2 последовательностей $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел с конечной нормой

$$\|\{b_i\}_{i=1}^{\infty}\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right)^{1/2} < \infty$$

и подмножество этого пространства

$$l_2^+ = \{\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2 : b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots\}.$$

§ 3. Теорема о существовании единственного решения задачи Коши для системы уравнений (1.1), (1.2)

Пусть заданы случайное векторное поле $f(t, x, \omega)$, $t \geq 0$, согласованное с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$, $f \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$ почти наверное, и F_0 -измеримое случайное векторное поле $u_0(x, \omega)$, $u_0 \in H^2$ почти наверное. Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1), (1.2)

$$u(0) = u_0. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормированный базис пространства H^0 . В качестве случайного векторного поля рассмотрим

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x, \omega), \quad \zeta(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t, \omega) E_i, \quad (3.2)$$

где $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^{\infty}$, $t \geq 0$, – последовательность независимых действительных броуновских движений, определенных на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) , относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ (см. определение 7 в [16; “Дополнения и упражнения” к гл. III]). Тогда ряд в (3.2) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}^+; H^0)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ (см., например, доказательство [19; гл. I, § 4.1, теорема 4.3]).

Поскольку почти все траектории броуновского движения не дифференцируемы ни в одной точке (см., например, [16; гл. III, § 1, теорема 1]) и производная броуновского движения существует почти наверное только в обобщенном смысле (см., например, [20; гл. III, § 1.4]), то необходимо придать смысл системе (1.1), (1.2). Будем считать, что это формальная запись стохастического интегрального уравнения. То есть введем следующее определение решения системы (1.1), (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Случайный процесс $u(t, x, \omega)$, $t \geq 0$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , со значениями в H^2 будем называть *решением системы* (1.1), (1.2), если он обладает следующими свойствами:

а) случайный процесс $u(t)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и почти все его траектории принадлежат пространству $\mathcal{K}$;

б) почти все траектории случайного процесса $u(t)$ удовлетворяют равенству

$$A_1 u(t) + \int_0^t (\nu A_2 u(s) + A_3 u(s) + B(u(s))) ds = A_1 u(0) + \int_0^t f(s) ds + \zeta(t), \quad t > 0, \quad (3.3)$$

которое имеет место в пространстве $C(\mathbb{R}^+; H^{-1})$.

Для построения решения задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) рассмотрим еще одну стохастическую систему

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 z + \nu A_2 z + A_3 z = \eta, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

где $z(t, x, \omega) = (z_1(t, x, \omega), z_2(t, x, \omega))^T$. Решение этой системы определяется аналогично определению решения системы (1.1), (1.2). При этом вместо (3.3) будем иметь

$$A_1 z(t) + \int_0^t (\nu A_2 z(s) + A_3 z(s)) ds = A_1 z(0) + \zeta(t), \quad t > 0. \quad (3.5)$$

Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любых $\nu > 0, \gamma, \rho, k, k_1 \geq 0, \{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ существует решение $z(t)$ системы (3.4) с начальным условием $z(0) = 0$, и оно единственно, т.е. если $\tilde{z}(t)$ – другое решение системы (3.4) с начальным условием $\tilde{z}(0) = 0$, то $z(t) = \tilde{z}(t)$ для любого $t \geq 0$ с вероятностью 1.

Доказательство этого предложения будет приведено ниже.

Поскольку $f \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$ почти наверное, $u_0 \in H^2$ почти наверное и по предположению 1 случайное векторное поле $z \in \mathcal{K}$ почти наверное, то рассмотрим множество

$$\Omega_* = \{\omega \in \Omega : f \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1}), u_0 \in H^2, z \in \mathcal{K}\} \quad (3.6)$$

полной меры $P(\Omega_*) = 1$. Такое множество существует в силу свойства множеств полной меры: конечное пересечение множеств полной меры является множеством полной меры.

Будем искать решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) в виде суммы $u(t) = v(t) + z(t)$, где $z(t)$ – решение системы (3.4) с начальным условием $z(0) = 0$. Тогда случайный процесс $v(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu A_2 v + A_3 v + B(v + z) = f, \quad t > 0, \quad v(0) = u_0. \quad (3.7)$$

В задаче Коши (3.7) зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega_*$ и в дальнейшем для удобства изложения будем считать эту задачу Коши детерминированной до изложения основного результата, доказанного в теореме 2 в конце этого параграфа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $z(t, x)$ – векторное поле из пространства $\mathcal{K}_T$. Векторное поле $v(t, x)$ будем называть *решением задачи Коши (3.7) на $[0, T] \times S$* , если $v \in \Xi_T$, $v(0) = u_0$ и уравнение в (3.7) имеет место в $L_2(0, T; H^{-1})$.

Для построения решения задачи Коши (3.7) нам будут необходимы несколько вспомогательных результатов.

ЛЕММА 1. I. Пусть $\theta, \xi \in h^2, \chi \in h^0$. Имеет место оценка

$$|(J(\theta, \xi), \chi)| \leq C(\|\theta\|_2 \|\theta\|_1 \|\xi\|_2 \|\xi\|_1)^{1/2} \|\chi\|_0.$$

II. Пусть $\xi, \chi \in h^1, \theta \in h^2$. Имеет место оценка

$$|(J(\theta, \xi), \chi)| \leq C(\|\theta\|_2 \|\theta\|_1 \|\chi\|_1 \|\chi\|_0)^{1/2} \|\xi\|_1.$$

III. Пусть $\theta \in h^1$, $\xi \in h^0$. Имеет место оценка

$$|(J(\mu, \theta), \xi)| \leq \|\theta\|_1 \|\xi\|_0.$$

Константа $C > 0$ не зависит от θ , ξ , χ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Разложив ψ по базису $\{e_m^{n,2}\}_{|m| \leq n}^{1 \leq n}$ пространства h^2 , легко доказать неравенство

$$((-\Delta)^{3/2}\psi, \psi) \leq \|\psi\|_2 \|\psi\|_1 \quad \text{для любого } \psi \in h^2.$$

Поэтому, используя лемму 2 с параметрами $p = 2$, $q = 4$, $r = 3/2$, $s = 1$ и лемму 3 при $p = 4$ из статьи [21], нетрудно получить оценку

$$\|\nabla\psi\|_{L^4(S)} \leq C_1 \|\psi\|_2^{1/2} \|\psi\|_1^{1/2} \quad \text{для любого } \psi \in h^2, \quad (3.8)$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от ψ . Тогда в силу того, что произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция (см., например, [22; гл. VII, § 2.1, свойство 1]), интегрируема функция $|\nabla\theta|^2 |\nabla\xi|^2$. По неравенству Коши–Буняковского для пространства $L_2(S)$ имеем

$$\| |\nabla\theta| |\nabla\xi| \|_{L_2(S)} \leq \| |\nabla\theta| \|_{L_4(S)} \| |\nabla\xi| \|_{L_4(S)}.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \left(0, \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial\mu} \psi, \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \psi \right)^T, \\ \nabla^\perp\psi &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \psi, -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial\mu} \psi \right)^T, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где вектор $\nabla\psi$ записан в сферической системе координат (см., например, [5; § 1]). В силу неравенства Коши–Буняковского для $\mathbb{R}^3$ почти всюду

$$|J(\theta, \xi)| = |\langle \nabla^\perp\theta, \nabla\xi \rangle_{\mathbb{R}^3}| \leq |\nabla^\perp\theta| |\nabla\xi| = |\nabla\theta| |\nabla\xi|.$$

Поэтому в силу свойств интеграла Лебега (см., например, [22; гл. V, § 5.3, свойство 7 и неравенство (12)]) интегрируема функция $|J(\theta, \xi)|^2$ и

$$\|J(\theta, \xi)\|_{L_2(S)} \leq \| |\nabla\theta| |\nabla\xi| \|_{L_2(S)} \leq \| |\nabla\theta| \|_{L_4(S)} \| |\nabla\xi| \|_{L_4(S)}. \quad (3.10)$$

Тогда ввиду свойств функций из $L_2(S)$ (см., например, [22; гл. VII, § 2.1, свойство 1]) интегрируема функция $J(\theta, \xi)\chi$ и по неравенству Коши–Буняковского для пространства $L_2(S)$ имеем

$$|(J(\theta, \xi), \chi)| = \left| \int_S J(\theta, \xi) \chi \, dS \right| \leq \|J(\theta, \xi)\|_{L_2(S)} \|\chi\|_{L_2(S)} = \|J(\theta, \xi)\|_{L_2(S)} \|\chi\|_0.$$

Отсюда и из (3.8) и (3.10) сразу следует первое неравенство в лемме.

II. Доказательство аналогично. Необходимо применить по-другому неравенство Коши–Буняковского для пространства $L_2(S)$ к $|(J(\theta, \xi), \chi)|$:

$$|(J(\theta, \xi), \chi)| \leq \| |\nabla\theta| \|_{L_4(S)} \|\chi\|_{L_4(S)} \| |\nabla\xi| \|_{L_2(S)},$$

и помимо оценки (3.8) использовать аналогичную оценку (доказательство см., например, в [23; § 7, лемма 9])

$$\|\psi\|_{L_4(S)} \leq C_2 \|\psi\|_1^{1/2} \|\psi\|_0^{1/2} \quad \text{для любого } \psi \in h^1, \quad (3.11)$$

где константа $C_2 > 0$ не зависит от ψ .

III. Поскольку $\mu \in C^\infty(S)$, $J(\mu, \theta) = \theta_\lambda$, $0 \leq 1 - \mu^2 \leq 1$, то, учитывая (2.3), (3.9), из свойств функций из $L_2(S)$ (см., например, [22; гл. VII, § 2.1, свойство 1]) функция $J(\mu, \theta)\xi$ интегрируема. Неравенство в лемме сразу следует из неравенства Коши–Буняковского для пространства $L_2(S)$ и из (2.3).

Лемма доказана.

Нетрудно доказать следующую лемму, которая была сформулирована в работе [24; гл. II, § 1.3, лемма 2.1.4].

ЛЕММА 2. Пусть каждое векторное пространство V_i плотно в банаховом пространстве X_i при $i = 1, 2, \dots, j$, Y – банахово пространство, j -линейное отображение $F: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_j \rightarrow Y$ таково, что для любых $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_j \in V_j$ выполнено неравенство

$$\|F(v_1, v_2, \dots, v_j)\|_Y \leq C \|v_1\|_{X_1} \|v_2\|_{X_2} \dots \|v_j\|_{X_j}, \quad (3.12)$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от v_i , $i = 1, 2, \dots, j$, $\|\cdot\|$ – норма в соответствующих пространствах. Тогда отображение F может быть продолжено единственным образом до непрерывного на пространство $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_j$ и (3.12) будет выполнено для любых $v_1 \in X_1, v_2 \in X_2, \dots, v_j \in X_j$.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено одно из условий:

$$\begin{array}{llll} \theta, \xi \in h^2, & \chi \in h^0; & \chi, \theta \in h^2, & \xi \in h^0; & \xi, \chi \in h^2, & \theta \in h^0; \\ \theta, \xi \in h^1, & \chi \in h^2; & \chi, \theta \in h^1, & \xi \in h^2; & \xi, \chi \in h^1, & \theta \in h^2. \end{array}$$

Тогда якобиан J обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (J(\theta, \xi), \chi) &= -(J(\xi, \theta), \chi), \\ (J(\theta, \xi), \chi) &= (J(\chi, \theta), \xi) = (J(\xi, \chi), \theta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если $\theta \in h^2, \xi \in h^0$ или $\theta \in h^1, \xi \in h^2$, то

$$(J(\theta, \xi), \theta) = 0.$$

Если $\theta \in h^2$, то

$$(J(\theta, \mu), \Delta\theta) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1, формулам (2.2.8), (2.2.10) из [6; гл. II, § 2] эти равенства справедливы для функций из класса $C^\infty(S)$. Из непрерывности вложений h^2 в h^1 и h^1 в h^0 , плотности $C^\infty(S)$ в h^0, h^1 и h^2 , леммы 1, леммы 2 и того, что $\mu \in C^\infty(S)$, сразу следуют равенства для θ, ξ, χ из тех функциональных пространств, которые указаны в условии леммы.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\theta \in C(0, T; h^0) \cap L_2(0, T; h^1)$, $\xi \in C(0, T; h^1) \cap L_2(0, T; h^2)$. Тогда имеет место оценка

$$\|\theta|\nabla\xi|\|_{L_2([0,T]\times S)} \leq C(\|\theta\|_{C(0,T;h^0)} \|\theta\|_{L_2(0,T;h^1)} \|\xi\|_{C(0,T;h^1)} \|\xi\|_{L_2(0,T;h^2)})^{1/2},$$

где константа $C > 0$ не зависит от θ и ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.8), (3.11) выполнены неравенства для почти всех $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{L_4(S)}^4 &\leq C\|\theta\|_{C(0,T;h^0)}^2 \|\theta(t)\|_{h^1}^2, \\ \| |\nabla\xi(t)| \|_{L_4(S)}^4 &\leq C\|\xi\|_{C(0,T;h^1)}^2 \|\xi(t)\|_{h^2}^2, \end{aligned}$$

где константа $C > 0$ не зависит от θ и ξ . Ввиду свойств интеграла Лебега (см., например, [22; гл. V, § 5.3, свойство 7]) интегрируемы функции $\|\theta(t)\|_{L_4(S)}^4$ и $\| |\nabla\xi(t)| \|_{L_4(S)}^4$. По теореме Фубини (см., например, [22; гл. V, § 6.4, замечание])

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\theta(t)\|_{L_4(S)}^4 dt &= \|\theta\|_{L_4([0,T]\times S)}^4 < \infty, \\ \int_0^T \| |\nabla\xi(t)| \|_{L_4(S)}^4 dt &= \| |\nabla\xi| \|_{L_4([0,T]\times S)}^4 < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L_4([0,T]\times S)} &\leq C\|\theta\|_{C(0,T;h^0)}^{1/2} \|\theta\|_{L_2(0,T;h^1)}^{1/2}, \\ \| |\nabla\xi| \|_{L_4([0,T]\times S)} &\leq C\|\xi\|_{C(0,T;h^1)}^{1/2} \|\xi\|_{L_2(0,T;h^2)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Ввиду свойств функций из $L_2([0, T] \times S)$ (см., например, [22; гл. VII, § 2.1, свойство 1]) интегрируема функция $\theta^2|\nabla\xi|^2$, и по неравенству Коши–Буняковского для пространства $L_2([0, T] \times S)$

$$\|\theta|\nabla\xi|\|_{L_2([0,T]\times S)} \leq \|\theta\|_{L_4([0,T]\times S)} \| |\nabla\xi| \|_{L_4([0,T]\times S)}.$$

Отсюда сразу вытекает требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Введем одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть M_i – подмножество, содержащее нулевой элемент, в нормированном пространстве X_i , $i = 1, 2, \dots, j$, Y – нормированное пространство. Отображение

$$\Phi: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times M_1 \times M_2 \times \dots \times M_j \rightarrow Y$$

будем называть *равномерно непрерывным по Липшицу на ограниченных подмножествах*, если для любых $R_0 > 0$, $R_1, R_2, \dots, R_j \geq 0$ и любого $r_0 > 0$, $r_0 \leq R_0$, существует константа $C = C(r_0, R_0, R_1, \dots, R_j) \geq 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\|\Phi(x_0^I, x_1^I, \dots, x_j^I) - \Phi(x_0^{II}, x_1^{II}, \dots, x_j^{II})\|_Y \leq C \left(|x_0^I - x_0^{II}| + \sum_{i=1}^j \|x_i^I - x_i^{II}\|_{X_i} \right),$$

где x_0^I, x_0^{II} – произвольные вещественные числа из отрезка $[r_0, R_0]$, $x_i^I, x_i^{II} \in M_i$, $\|x_i^I\|_{X_i}, \|x_i^{II}\|_{X_i} \leq R_i$, $i = 1, 2, \dots, j$, – произвольные элементы соответствующих подмножеств, константа C не зависит от $(x_0^I, x_1^I, \dots, x_j^I)$ и $(x_0^{II}, x_1^{II}, \dots, x_j^{II})$.

Следующий результат о свойствах решений задачи Коши (3.7) является ключевым для построения решения задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы векторные поля $f \in L_2(0, T; H^{-1})$, $z \in \mathcal{K}_T$ при некотором $T > 0$, $u_0 \in H^2$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (3.7) на $[0, T] \times S$ для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$. Кроме того, оператор

$$\Phi: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times (\mathbb{R}^+)^4 \times L_2(0, T; H^{-1}) \times H^2 \times \mathcal{K}_T \rightarrow \Xi_T \subset \mathcal{K}_T,$$

который каждому вектору $(\nu, \gamma, \rho, k, k_1, f, u_0, z)$ сопоставляет решение v задачи Коши (3.7) на $[0, T] \times S$ является равномерно непрерывным по Липшицу на ограниченных подмножествах, если его рассматривать как действующий в Ξ_T и как действующий в $\mathcal{K}_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность. Пусть существуют два решения $v^I(t)$ и $v^{II}(t)$ задачи Коши (3.7) на $[0, T] \times S$. Тогда разность $w(t) = v^I(t) - v^{II}(t)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 w + \nu A_2 w + A_3 w + B(v^I + z) - B(v^{II} + z) = 0, \quad t > 0, \quad w(0) = 0. \quad (3.14)$$

Умножая скалярно уравнение в (3.14) на w , получаем в силу (2.1)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} A_1 w, w \right\rangle + \nu \langle A_2 w, w \rangle + \langle A_3 w, w \rangle + \langle B(v^I + z) - B(v^{II} + z), w \rangle = 0.$$

Отсюда, учитывая, что аналогично доказательству леммы 1.2 из [25; гл. III, § 1.4] нетрудно получить равенство

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} A_1 w, w \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle A_1 w, w \rangle,$$

имеем в силу (2.1)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle A_1 w, w \rangle + \nu \|w\|_2^2 + \langle A_3 w, w \rangle = \langle B(v^{II} + z) - B(v^I + z), w \rangle. \quad (3.15)$$

Оценим снизу $\langle A_3 \psi, \psi \rangle$, $\psi \in H^1$. По определению оператора A_3 , используя (2.1), (2.2) и учитывая, что $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} \langle A_3 \psi, \psi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -k\Delta\psi_1 + 2k\Delta\psi_2 \\ k\Delta\psi_1 - (2k + k_1 + \nu\gamma)\Delta\psi_2 + \rho\psi_2 \end{pmatrix}, \psi \right\rangle \\ &= k\|\psi_1\|_1^2 + 2k(\Delta\psi_2, \psi_1) + k(\Delta\psi_1, \psi_2) + (2k + k_1 + \nu\gamma)\|\psi_2\|_1^2 + \rho\|\psi_2\|_0^2 \\ &\geq k\|\psi_1\|_1^2 - 3k\|\psi_1\|_1 \|\psi_2\|_1 + 2k\|\psi_2\|_1^2. \end{aligned}$$

Из неравенств $k \geq 0$ и

$$a^2 - 3ab + 3b^2 \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

имеем

$$\langle A_3 \psi, \psi \rangle \geq -k\|\psi_2\|_1^2 \geq -k\|\psi\|_1^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^1. \quad (3.16)$$

Оценим сверху $|\langle B(v^I + z) - B(v^{\text{II}} + z), w \rangle|$. По определению $B(u)$

$$\begin{aligned} & |\langle B(v^I + z) - B(v^{\text{II}} + z), w \rangle| \\ &= \left| \left\langle \begin{pmatrix} J(\Delta(v_1^I + z_1) + 2\mu, w_1) + J(\Delta(v_2^I + z_2), w_2) \\ J(\Delta(v_2^I + z_2) - \gamma(v_2^I + z_2), w_1) + J(\Delta(v_1^I + z_1) + 2\mu, w_2) \end{pmatrix} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \begin{pmatrix} J(\Delta w_1, v_1^{\text{II}} + z_1) + J(\Delta w_2, v_2^{\text{II}} + z_2) \\ J(\Delta w_2 - \gamma w_2, v_1^{\text{II}} + z_1) + J(\Delta w_1, v_2^{\text{II}} + z_2) \end{pmatrix}, w \right\rangle \right| \\ &= |(J(\Delta(v_1^I + z_1) + 2\mu, w_1), w_1) + (J(\Delta(v_2^I + z_2), w_2), w_1) \\ &\quad + (J(\Delta(v_2^I + z_2) - \gamma(v_2^I + z_2), w_1), w_2) + (J(\Delta(v_1^I + z_1) + 2\mu, w_2), w_2) \\ &\quad - (J(\Delta w_1, v_1^{\text{II}} + z_1), w_1) - (J(\Delta w_2, v_2^{\text{II}} + z_2), w_1) \\ &\quad - (J(\Delta w_2 - \gamma w_2, v_1^{\text{II}} + z_1), w_2) - (J(\Delta w_1, v_2^{\text{II}} + z_2), w_2)|. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 и того, что $\mu \in C^\infty(S)$,

$$\begin{aligned} & |\langle B(v^I + z) - B(v^{\text{II}} + z), w \rangle| \\ &= |\gamma(J(\Delta(v_2^I + z_2), w_1), w_2) + (J(\Delta w_1, v_1^{\text{II}} + z_1), w_1) + (J(\Delta w_2, v_2^{\text{II}} + z_2), w_1) \\ &\quad + (J(\Delta w_2, v_1^{\text{II}} + z_1), w_2) + (J(\Delta w_1, v_2^{\text{II}} + z_2), w_2)|. \end{aligned}$$

Тогда по лемме 1, п. I, равенству (3.13) и из непрерывности вложения пространства h^2 в h^0 получим

$$|\langle B(v^I + z) - B(v^{\text{II}} + z), w \rangle| \leq C_1 \max_{i=I, \text{II}} (\|v^i + z\|_2 \|v^i + z\|_1)^{1/2} \|w\|_2^{3/2} \|w\|_1^{1/2},$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от v^I и v^{II} . Отсюда, используя очевидное неравенство

$$a^3 b \leq a^3 b + b^3 a \leq a^4 + b^4, \quad a, b > 0,$$

выводим оценку

$$|\langle B(v^I + z) - B(v^{\text{II}} + z), w \rangle| \leq \nu \|w\|_2^2 + C_2 \max_{i=I, \text{II}} (\|v^i + z\|_2 \|v^i + z\|_1)^2 \|w\|_1^2, \quad (3.17)$$

где $C_2 = C_1^4 / \nu^3$.

Из (3.15)–(3.17) вытекает оценка

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle A_1 w, w \rangle + \nu \|w\|_2^2 - k \|w\|_1^2 \leq \nu \|w\|_2^2 + C_2 \max_{i=I, \text{II}} (\|v^i + z\|_2 \|v^i + z\|_1)^2 \|w\|_1^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle A_1 w, w \rangle \leq C_3 \left(1 + \max_{i=I, \text{II}} (\|v^i + z\|_2 \|v^i + z\|_1)^2 \right) \|w\|_1^2,$$

где $C_3 = \max\{C_2, k\}$. В силу (2.1), определения операторов A_0 и A_1 , так как $\gamma \geq 0$, справедливо неравенство

$$0 \leq \| \psi \|_1^2 = \langle A_0 \psi, \psi \rangle \leq \langle A_1 \psi, \psi \rangle \quad \text{для любого } \psi \in H^1. \quad (3.18)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle A_1 w, w \rangle \leq C_3 \left(1 + \max_{i=I, \text{II}} (\|v^i + z\|_2 \|v^i + z\|_1)^2 \right) \langle A_1 w, w \rangle.$$

Интегрируя по t последнее неравенство и учитывая, что $w(0) = 0$, получим

$$\langle A_1 w(t), w(t) \rangle \leq \int_0^t \tilde{\psi}(s) \langle A_1 w(s), w(s) \rangle ds,$$

где

$$\tilde{\psi}(s) = 2C_3 \left(1 + \max_{i=1, \Pi} (\|v^i + z\|_2 \|v^i + z\|_1)^2 \right) > 0.$$

Отсюда, домножив на $\tilde{\psi}(t) \exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right)$ левую и правую часть неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \int_0^t \tilde{\psi}(s) \langle A_1 w(s), w(s) \rangle ds \right) &= \tilde{\psi}(t) \exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \\ &\times \left(\langle A_1 w(t), w(t) \rangle - \int_0^t \tilde{\psi}(s) \langle A_1 w(s), w(s) \rangle ds \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Интегрируя по t , получим

$$\exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \int_0^t \tilde{\psi}(s) \langle A_1 w(s), w(s) \rangle ds \leq 0 \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

Поэтому $\langle A_1 w(t), w(t) \rangle = 0$ для почти всех $t \in [0, T]$. Поскольку очевидно, что оператор A_1 положительно определен, то $w(t) = 0$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Единственность доказана.

Существование. Для доказательства существования будем использовать общий подход, называемый методом Галеркина, т.е. построим приближенные решения задачи Коши (3.7) на $[0, T] \times S$ и покажем, что они имеют предел, который удовлетворяет исходной задаче Коши (3.7) на $[0, T] \times S$. Доказательство проведем в три этапа. Заметим, что предлагаемая схема является аналогом схемы доказательства теоремы 2.1.13 в [24] существования решения для уравнения Навье–Стокса по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе с условием того, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентное векторное поле по переменным x .

Шаг 1: априорная оценка. Пусть v – решение задачи Коши (3.7) на $[0, T] \times S$. Вычислим вдоль этой траектории уравнения в (3.7) производную функции $\|A_1 v\|_0^2$. В силу (2.1) и леммы 1.2 из [25; гл. III, § 1.4]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 v\|_0^2 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A_1 v, A_1 v \right\rangle = \langle -\nu A_2 v - A_3 v - B(v + z) + f, A_1 v \rangle \\ &= -\nu \langle A_2 v, A_1 v \rangle - \langle A_3 v, A_1 v \rangle - \langle B(v + z), A_1 v \rangle + \langle f, A_1 v \rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Оценим сверху $|\langle B(v + z), A_1 v \rangle|$. По определению $B(u)$ и лемме 3

$$\begin{aligned} &|\langle B(v + z), A_1 v \rangle| \\ &= \left| \left\langle \begin{pmatrix} J(\Delta(v_1 + z_1) + 2\mu, v_1 + z_1) + J(\Delta(v_2 + z_2), v_2 + z_2) \\ J(\Delta(v_2 + z_2) - \gamma(v_2 + z_2), v_1 + z_1) + J(\Delta(v_1 + z_1) + 2\mu, v_2 + z_2) \end{pmatrix}, A_1 v \right\rangle \right| \\ &= \left| -\langle J(\Delta z_1, v_1 + z_1), \Delta v_1 \rangle - 2\langle J(\mu, z_1), \Delta v_1 \rangle - \langle J(\Delta z_2, v_2 + z_2), \Delta v_1 \rangle \right. \\ &\quad - \langle J(\Delta z_2 - \gamma(v_2 + z_2), v_1 + z_1), \Delta v_2 \rangle - \langle J(\Delta z_1, v_2 + z_2), \Delta v_2 \rangle \\ &\quad - 2\langle J(\mu, z_2), \Delta v_2 \rangle + \gamma \langle J(\Delta(v_2 + z_2) - \gamma z_2, v_1 + z_1), v_2 \rangle \\ &\quad \left. + \gamma \langle J(\Delta(v_1 + z_1), z_2), v_2 \rangle + 2\gamma \langle J(\mu, z_2), v_2 \rangle \right|. \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 1, пп. II и III, равенству (3.13) и ввиду непрерывности вложения h^2 в h^0 получим

$$\begin{aligned} |\langle B(v+z), A_1 v \rangle| &\leq C_4 (\|z\|_3 \|z\|_2 \|v\|_2 \|v\|_1)^{1/2} \|v\|_3 \\ &\quad + \|z\|_2 (\|z\|_3 \|z\|_1)^{1/2} \|v\|_3 + \|z\|_1 \|v\|_2. \end{aligned}$$

Везде ниже в шаге 1 считаем, что $C_i \geq 0$, $i \geq 4$, – константы, не зависящие от $\psi \in H^1$ (если в оценке участвует это векторное поле), v, z . Тогда из непрерывности вложения h^2 в h^1 и очевидного неравенства

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

вытекает

$$|\langle B(v+z), A_1 v \rangle| \leq \frac{\nu}{4} \|v\|_3^2 + (1 + C_5 \|z\|_3 \|z\|_2) \|v\|_2^2 + C_5 (\|z\|_3 \|z\|_2^3 + \|z\|_1^2). \quad (3.22)$$

Из (2.1) и (3.18) имеем

$$\langle A_2 v, A_1 v \rangle = \langle A_1 A_0 v, A_0 v \rangle \geq \|A_0 v\|_1^2 = \|v\|_3^2. \quad (3.23)$$

Ввиду (2.1), непрерывности вложения h^2 в h^0 , h^1 , оценки (3.16) и неравенств $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle A_3 v, A_1 v \rangle &= \langle A_3 A_0^{1/2} v, A_0^{1/2} v \rangle + \gamma (k \langle \Delta v_1, v_2 \rangle + (2k + k_1 + \nu \gamma) \|v_2\|_1^2 + \rho \|v_2\|_0^2) \\ &\geq -C_6 \|v\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тогда из (2.2), (3.20) и (3.22) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 v\|_0^2 &\leq -\frac{3\nu}{4} \|v\|_3^2 + (1 + C_6 + C_5 \|z\|_3 \|z\|_2) \|v\|_2^2 \\ &\quad + C_5 (\|z\|_3 \|z\|_2^3 + \|z\|_1^2) + \|f\|_{-1} \|A_1 v\|_1. \end{aligned}$$

Поскольку $\gamma \geq 0$, то

$$\|v\|_2^2 \leq \|A_1 v\|_0^2. \quad (3.25)$$

В силу (2.1) и непрерывности вложения h^3 в h^1 , h^2

$$\|v\|_3^2 \leq \|A_1 v\|_1^2 = \langle A_1^2 v, A_0 v \rangle = \|v\|_3^2 + 2\gamma \|v_2\|_2^2 + \gamma^2 \|v_2\|_1^2 \leq C_7 \|v\|_3^2. \quad (3.26)$$

Поэтому ввиду (3.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 v\|_0^2 &\leq -\nu \|v\|_3^2 + 2(1 + C_6 + C_5 \|z\|_3 \|z\|_2) \|A_1 v\|_0^2 \\ &\quad + 2C_5 (\|z\|_3 \|z\|_2^3 + \|z\|_1^2) + \frac{2C_7}{\nu} \|f\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \|A_1 v\|_0^2 - \tilde{\psi}(t) \|A_1 v\|_0^2 + \nu \|v\|_3^2 \leq \tilde{\theta}(t), \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(t) &= 2(1 + C_6 + C_5 \|z\|_3 \|z\|_2) > 0, \\ \tilde{\theta}(t) &= 2C_5 (\|z\|_3 \|z\|_2^3 + \|z\|_1^2) + \frac{2C_7}{\nu} \|f\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Интегрируя неравенство (3.27) по t , получим

$$\|A_1 v(t)\|_0^2 - \|A_1 v(0)\|_0^2 - \int_0^t \tilde{\psi}(s) \|A_1 v(s)\|_0^2 ds + \nu \int_0^t \|v(s)\|_3^2 ds \leq \int_0^t \tilde{\theta}(s) ds. \quad (3.28)$$

Отсюда, домножив на $\tilde{\psi}(t) \exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right)$ левую и правую часть неравенства, используя (3.19) с заменой $\langle A_1 w, w \rangle$ на $\|A_1 v\|_0^2$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \int_0^t \tilde{\psi}(s) \|A_1 v(s)\|_0^2 ds \right) \\ & \leq \tilde{\psi}(t) \exp\left(-\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \left(\|A_1 v(0)\|_0^2 + \int_0^t \tilde{\theta}(s) ds - \nu \int_0^t \|v(s)\|_3^2 ds \right). \end{aligned}$$

Проинтегрируем по t и домножим неравенство на $\exp\left(\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right)$:

$$\int_0^t \tilde{\psi}(s) \|A_1 v(s)\|_0^2 ds \leq \int_0^t \tilde{\psi}(\xi) \exp\left(\int_\xi^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \left(\|A_1 v(0)\|_0^2 + \int_0^\xi \tilde{\theta}(s) ds \right) d\xi.$$

Тогда из (3.28) выводим для любого $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|A_1 v(t)\|_0^2 + \nu \int_0^t \|v(s)\|_3^2 ds & \leq \|A_1 v(0)\|_0^2 + \int_0^t \tilde{\theta}(s) ds \\ & + \int_0^t \tilde{\psi}(\xi) \exp\left(\int_\xi^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \left(\|A_1 v(0)\|_0^2 + \int_0^\xi \tilde{\theta}(s) ds \right) d\xi. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^t \tilde{\psi}(\xi) \exp\left(\int_\xi^t \tilde{\psi}(s) ds\right) d\xi = \exp\left(\int_0^t \tilde{\psi}(s) ds\right) - 1.$$

Поэтому в силу (3.25) и того, что $v(0) = u_0$ и $\tilde{\psi}(t) > 0$, $\tilde{\theta}(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$,

$$\|v(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|v(s)\|_3^2 ds \leq \left(\|A_1 u_0\|_0^2 + \int_0^T \tilde{\theta}(s) ds \right) \exp\left(\int_0^T \tilde{\psi}(s) ds\right). \quad (3.29)$$

Следовательно, ввиду условий теоремы на u_0 , z , f и непрерывности вложения Ξ_T в $C(0, T; H^2)$

$$\|v\|_{C(0, T; H^2)}, \|v\|_{L_2(0, T; H^3)} \leq \tilde{C}_1(u_0, z, f) < \infty, \quad (3.30)$$

где $\tilde{C}_1(u_0, z, f) \geq 0$ – константа, зависящая от u_0 , z , f и не зависящая от v .

Для получения оценки сверху на $\|\frac{\partial}{\partial t} v\|_{L_2(0, T; H^1)}$ вначале получим оценки сверху на $\|B(v+z)\|_{L_2(0, T; H^{-1})}$ и $\|\nu A_2 v + A_3 v\|_{L_2(0, T; H^{-1})}$.

Поскольку для любого $\psi \in H^1$ в силу леммы 1, п. II, непрерывности вложений h^3 в h^1 и h^2 в h^0 , определения $B(u)$, так как $\mu \in C^\infty(S)$,

$$|\langle B(v+z), \psi \rangle| \leq C_8 (\|v+z\|_2 \|v+z\|_1 (C_8 + \|v+z\|_3) (C_8 + \|v+z\|_2))^{1/2} \|\psi\|_1,$$

то по лемме 1.5 из [6; гл. I, § 3] и непрерывности вложений h^3 в h^2 и h^2 в h^1

$$\|B(v+z)\|_{L_2(0,T;H^{-1})}^2 \leq C_9 \int_0^T \|v(t)+z(t)\|_2^2 (C_9 + \|v(t)+z(t)\|_3^2) dt.$$

Отсюда ввиду (3.30), непрерывности вложения h^2 в h^1 и того, что $z \in \mathfrak{H}_T$,

$$\|B(v+z)\|_{L_2(0,T;H^{-1})} \leq \tilde{C}_2(u_0, z, f) < \infty, \quad (3.31)$$

где $\tilde{C}_2(u_0, z, f) \geq 0$ – константа, зависящая от u_0, z, f и не зависящая от v .

Из (2.1) и непрерывности вложений h^1 в h^0 , h^3 в h^0 , h^1 , h^2 для любого $\psi \in H^1$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle \nu A_2 v + A_3 v, \psi \rangle| &= |\nu \langle A_0^{3/2} v, A_0^{1/2} \psi \rangle + \langle A_3 v, \psi \rangle| \\ &\leq \nu \|v\|_3 \| \psi \|_1 + \|A_3 v\|_0 \| \psi \|_0 \leq C_{10} \|v\|_3 \| \psi \|_1. \end{aligned}$$

Поэтому в силу оценки (3.30) и по лемме 1.5 из [6; гл. I, § 3]

$$\|\nu A_2 v + A_3 v\|_{L_2(0,T;H^{-1})} \leq C_{10} \|v\|_{L_2(0,T;H^3)} \leq C_{10} \tilde{C}_1(u_0, z, f) < \infty. \quad (3.32)$$

Поскольку v – решение уравнения из (3.7), то из (3.31) и (3.32) получим

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} A_1 v \right\|_{L_2(0,T;H^{-1})} \leq C_{10} \tilde{C}_1(u_0, z, f) + \tilde{C}_2(u_0, z, f) + \|f\|_{L_2(0,T;H^{-1})} = \tilde{C}_3(u_0, z, f).$$

Тогда ввиду перестановочности производных в смысле распределений (см., например, [26; § 1.2, замечание 1, и § 3.6] и [6; гл. I, § 3])

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} v \right\|_{L_2(0,T;H^1)} \leq \tilde{C}_3(u_0, z, f).$$

Следовательно,

$$\|v\|_{\Xi_T} \leq \tilde{C}_4(u_0, z, f), \quad (3.33)$$

$$\tilde{C}_4(u_0, z, f) = \max\{\tilde{C}_1(u_0, z, f), \tilde{C}_3(u_0, z, f)\}.$$

Шаг 2: приближенные решения. Обозначим через H_N линейную оболочку множества $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n \leq N}$ собственных векторных полей оператора A_0 и через $P_N: H^{-1} \rightarrow H^N$ – ортогональный проектор на множество H_N (определение и свойства ортогонального проектора см., например, в [23; § 6] и [27; гл. VII, § 2]).

Определим приближенное решение следующим образом. Подействовав формально оператором P_N на уравнение в (3.7), получим

$$P_N \frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu P_N A_2 v + P_N A_3 v + P_N B(v+z) = P_N f, \quad t > 0.$$

Очевидно, что векторное поле $v \in H_N$ удовлетворяет этому уравнению тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu A_2 v + A_3 v + P_N B(v+z) = P_N f, \quad t > 0. \quad (3.34)$$

Уравнение дополним начальным условием

$$v(0) = P_N u_0. \quad (3.35)$$

Будем считать v решением задачи Коши (3.34), (3.35), если $v \in C(0, T; H_N)$, $\frac{\partial}{\partial t} v \in L_2(0, T; H_N)$, выполнено (3.35) и уравнение (3.34) имеет место в пространстве $L_2(0, T; H_N)$.

Пусть существует единственное решение $v = v_N$ задачи Коши (3.34), (3.35). Вычислим производную функции $\|A_1 v_N\|_0^2$ вдоль траектории (3.34), (3.35). В силу леммы 1.2 из [25; гл. III, § 1.4] и (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 v_N\|_0^2 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A_1 v_N, A_1 v_N \right\rangle \\ &= \langle -\nu A_2 v_N - A_3 v_N - P_N B(v_N + z) + P_N f, A_1 v_N \rangle \\ &= \langle -\nu A_2 v_N - A_3 v_N - B(v_N + z) + f, A_1 v_N \rangle. \end{aligned}$$

Тогда, повторяя рассуждения шага 1, учитывая небольшие отличия в силу того, что v_N удовлетворяет задаче Коши (3.34), (3.35) с P_N , используя свойства ортогонального проектора, получим, что выполнена оценка (3.30)

$$\|v_N\|_{C(0, T; H^2)} \leq \tilde{C}_1(u_0, z, f) \quad (3.36)$$

и оценка (3.33)

$$\|v_N\|_{\Xi_T} \leq \tilde{C}_4(u_0, z, f). \quad (3.37)$$

Из задачи Коши (3.34), (3.35) следует, что ее решение сводится к решению задачи Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt} y = \vartheta(t, y), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_{2N(N+2)})^T,$$

где $2N(N+2)$ – размерность H_N , векторное поле $\vartheta(t, \cdot) = (\vartheta_1(t, \cdot), \vartheta_2(t, \cdot), \dots, \vartheta_{2N(N+2)}(t, \cdot))^T$ удовлетворяет условиям Каратеодори из [28; гл. I, § 1.1] и условию (6) теоремы 2 из [28; гл. I, § 1.2] в силу (3.36) и так как $z \in \mathcal{H}$, $f \in L_2(0, T; H^{-1})$. Ввиду (3.36) имеет место априорная оценка $\|y\|_{C(0, T; \mathbb{R}^{2N(N+2)})} \leq C_{11}$, где $C_{11} \geq 0$ – константа. Тогда в силу теорем 1, 2 из [28; гл. I, § 1.2] и теоремы 4 из [28; гл. I, § 1.3] (общей теории уравнений Каратеодори – обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью) следует, что эта задача Коши однозначно разрешима на интервале $[0, T]$, причем $y \in C(0, T; \mathbb{R}^{2N(N+2)})$ и $\frac{\partial}{\partial t} y \in L_2(0, T; \mathbb{R}^{2N(N+2)})$. Поэтому задача Коши (3.34), (3.35) однозначно разрешима, $v = v_N$ на интервале $[0, T]$, уравнение (3.34) имеет место в пространстве $L_2(0, T; H_N)$ и $v_N \in C(0, T; H_N)$, $\frac{\partial}{\partial t} v_N \in L_2(0, T; H_N)$.

Из (3.37) следует, что последовательность $\{v_N\}_{N=1}^\infty$ ограничена в Ξ_T .

Шаг 3: предельный переход. Поскольку замкнутый шар в гильбертовом пространстве слабо компактен (см., например, учитывая рефлексивность гильбертова пространства, [22; гл. IV, § 3.3, замечание, и § 3.4, теорема 5]), линейные операторы

$$\begin{aligned} \Xi_T &\rightarrow L_2(0, T; H^{-1}), \quad \psi \mapsto \frac{\partial}{\partial t} A_1 \psi; & \Xi_T &\rightarrow L_2(0, T; H^1), \quad \psi \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \psi; \\ \Xi_T &\rightarrow L_2(0, T; H^{-1}), \quad \psi \mapsto A_0^2 \psi; & \Xi_T &\rightarrow L_2(0, T; H^3), \quad \psi \mapsto \psi; \end{aligned}$$

ограничены, Ξ_T компактно вложено в $L_2(0, T; H^2)$ (см., например, [15; гл. I, § 5.2, теорема 5.1]), оператор обобщенного дифференцирования слабо замкнут

(см., например, [29; § 5, теорема 1]), то ввиду [22; гл. II, § 2.1, § 2.2, теорема 2, § 6.1, теорема 2] и того, что из последовательности, сходящейся в среднем, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду (см., например, [22; гл. VII, § 2.5, свойство 4]), вложения h^2 в h^1 , h^0 непрерывны и имеет место (2.3), из ограниченной последовательности $\{v_N\}_{N=1}^\infty$ в Ξ_T можно выделить подпоследовательность такую, что при $i \rightarrow \infty$

$$v_{N_i} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } \Xi_T,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 v_{N_i} \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t} A_1 v, \quad A_0^2 v_{N_i} \rightharpoonup A_0^2 v \quad \text{слабо в } L_2(0, T; H^{-1}), \quad (3.38)$$

$$A_3 v_{N_i} \rightharpoonup A_3 v \quad \text{слабо в } L_2(0, T; H^1), \quad (3.39)$$

$$v_{N_i} \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_2(0, T; H^2), \quad (3.40)$$

$$v_{N_i} \rightarrow v, \quad \nabla v_{N_i} \rightarrow \nabla v, \quad \Delta v_{N_i} \rightarrow \Delta v \quad \text{почти всюду,}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{N_i} \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t} v \quad \text{слабо в } L_2(0, T; H^1), \quad v_{N_i} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } L_2(0, T; H^3). \quad (3.41)$$

Заметим, что из непрерывности вложений Ξ_T в $C(0, T; H^2)$, h^3 в h^2 , h^2 в h^1 , h^0 , леммы 4, равенства (3.13), сходимости почти всюду в (3.40), леммы 1.3 из [15; гл. I, § 1.4] и того, что $z \in \mathcal{H}_T$, $v_{N_i}, v \in \Xi_T$, следует

$$B(v_{N_i} + z) \rightharpoonup B(v + z) \quad \text{слабо в } L_2(0, T; H^{-1}). \quad (3.42)$$

Пусть $j \geq 1$ такое, что $N_i \geq j$. Подействуем оператором P_j на уравнение (3.34) при $N = N_i$. Ввиду $P_j P_{N_i} = P_j$ имеем

$$P_j \frac{\partial}{\partial t} A_1 v_{N_i} + \nu P_j A_2 v_{N_i} + P_j A_3 v_{N_i} + P_j B(v_{N_i} + z) = P_j f, \quad t > 0.$$

Тогда в силу (3.38)–(3.40), (3.42) получим

$$P_j \frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu P_j A_2 v + P_j A_3 v + P_j B(v + z) = P_j f, \quad t > 0,$$

где равенство имеет место в пространстве $L_2(0, T; H^{-1})$. Так как j – произвольно, то в $L_2(0, T; H^{-1})$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu A_2 v + A_3 v + B(v + z) = f, \quad t > 0.$$

Пусть ψ – произвольная бесконечно дифференцируемая функция из $[0, T]$ в H^{-1} такая, что $\psi(T) = 0$. По формуле интегрирования по частям (ее доказательство легко получить, используя свойство (1.71) из [25; гл. III, § 1.4] при $u = A_1 v$) в силу непрерывности вложения Ξ_T в $C(0, T; H^2)$ имеем

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t} v, \psi \right\rangle dt = -\langle v(0), \psi(0) \rangle - \int_0^T \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \psi \right\rangle dt, \quad (3.43)$$

и, учитывая (3.35),

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t} v_{N_i}, \psi \right\rangle dt = -\langle P_{N_i} u_0, \psi(0) \rangle - \int_0^T \left\langle v_{N_i}, \frac{\partial}{\partial t} \psi \right\rangle dt.$$

Поскольку $P_{N_i} u_0 \rightarrow u_0$ сильно в H^2 , то $P_{N_i} u_0 \rightarrow u_0$ слабо в H^2 . Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу, получим в силу (3.41)

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t} v, \psi \right\rangle dt = -\langle u_0, \psi(0) \rangle - \int_0^T \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \psi \right\rangle dt. \quad (3.44)$$

Тогда из (3.43) и (3.44) следует, что

$$\langle u_0, \psi(0) \rangle = \langle v(0), \psi(0) \rangle$$

Ввиду произвольности $\psi(0)$ выводим $v(0, x) = u_0(x)$ для почти всех $x \in S$.

Существование решения доказано.

Φ равномерно непрерывен по Липшицу на ограниченных подмножествах.

В определении 3 в нашем случае $j = 7$. Пусть $v^I = \Phi(\nu^I, \gamma^I, \rho^I, k^I, k_1^I, f^I, u_0^I, z^I)$, $v^{II} = \Phi(\nu^{II}, \gamma^{II}, \rho^{II}, k^{II}, k_1^{II}, f^{II}, u_0^{II}, z^{II})$, $w = v^I - v^{II}$. Тогда w удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} A_1^I w + \nu^I A_2 w + A_3^I w + B^I(v^I + z^I) - B^I(v^{II} + z^{II}) \\ &= f^I - f^{II} - \frac{\partial}{\partial t} (A_1^I - A_1^{II}) v^{II} - (\nu^I - \nu^{II}) A_2 v^{II} - (A_3^I - A_3^{II}) v^{II} \\ & \quad - (B^I(v^{II} + z^{II}) - B^{II}(v^{II} + z^{II})), \quad t > 0, \quad w(0) = u_0^I - u_0^{II}, \end{aligned}$$

где A_1^I, A_1^{II} – операторы A_1 с параметрами соответственно γ^I, γ^{II} ; A_3^I, A_3^{II} – операторы A_3 с параметрами соответственно $(\nu^I, \gamma^I, \rho^I, k^I, k_1^I)$ и $(\nu^{II}, \gamma^{II}, \rho^{II}, k^{II}, k_1^{II})$; $B^I(u), B^{II}(u)$ – операторы $B(u)$ с параметрами соответственно γ^I, γ^{II} . В силу оценок (3.29) и (3.33) $\max_{q=I,II} \|v^q\|_{C(0,T;H^2)}, \max_{q=I,II} \|v^q\|_{\Xi_T}$ будут ограничены константой, зависящей от $r_0, R_i, i = 0, 1, \dots, 7$, и не зависящей от $(\nu^I, \gamma^I, \rho^I, k^I, k_1^I, f^I, u_0^I, z^I), (\nu^{II}, \gamma^{II}, \rho^{II}, k^{II}, k_1^{II}, f^{II}, u_0^{II}, z^{II})$. Учитывая этот факт, нетрудно получить аналог неравенства (3.29) для w и, следовательно, неравенство в определении 3 для $\|w\|_{\mathcal{K}_T}$, оценив параметры, где это необходимо, через $r_0, R_i, i = 0, 1, \dots, 7$, а затем, действуя аналогично получению неравенства (3.33), вывести неравенство в определении 3 для $\|w\|_{\Xi_T}$.

Равномерная непрерывность Φ по Липшицу на ограниченных подмножествах доказана.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что единственность в теореме 1 доказана в более широком классе, когда $z \in C(0, T; H^1) \cap L_2(0, T; H^2)$, $v \in L_2(0, T; H^2)$, $\frac{\partial}{\partial t} v \in L_2(0, T; H^0)$ и уравнение в (3.7) имеет место в пространстве $L_2(0, T; H^{-2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условии теоремы 1 $z \equiv 0$, то мы получаем теорему существования единственного решения задачи Коши для нестохастической системы (1.1) с детерминированными начальными данными $u_0 \in H^2$ и правой частью из класса $g \in L_2(0, T; H^{-1})$. Этот результат отличается от результата В. Н. Крупчатникова из [1] тем, что правая часть системы в [1] не зависит от t и принадлежит более узкому классу $g \in H^{-1}$. Дополнительно к результату в [1] в теореме 1 доказана равномерная непрерывность по Липшицу на ограниченных подмножествах оператора, сопоставляющего множеству входящих в задачу параметров решение задачи Коши (3.7), $z \equiv 0$. Таким образом, получена оценка непрерывной зависимости решения детерминированной задачи

Коши от совокупности параметров $(\nu, \gamma, \rho, k, k_1)$, начальных данных и правой части на конечном отрезке изменения переменной t .

Ниже приводится доказательство предложения 1, формулировка которого была приведена в начале §3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность. Доказательство единственности полностью аналогично доказательству единственности в теореме 1, но при этом необходимо оценивать не дифференциальное уравнение, а интегральное в силу определения решения.

Существование. Вначале докажем существование решения системы

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 \hat{z} + \nu A_2 \hat{z} + A_3 \hat{z} + C_1 A_1 \hat{z} = \exp(-C_1 t) \eta, \quad t > 0, \quad (3.45)$$

где C_1 – константа C_6 из оценки (3.24) (рассматриваем случай, когда $C_1 > 0$), с начальным условием $\hat{z}(0) = 0$. Будем считать, что определение решения этой системы аналогично определению решения системы (1.1), (1.2), при этом вместо (3.3) будем иметь

$$\begin{aligned} A_1 \hat{z}(t) + \int_0^t (\nu A_2 \hat{z}(s) + A_3 \hat{z}(s) + C_1 A_1 \hat{z}(s)) ds &= A_1 \hat{z}(0) + \exp(-C_1 t) \zeta(t) \\ &+ C_1 \int_0^t \exp(-C_1 s) \zeta(s) ds, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Заметим, что единственность решения системы (3.45) доказывается полностью аналогично доказательству единственности в теореме 1, но при этом необходимо оценивать не дифференциальное уравнение, а интегральное в силу определения решения.

Схема доказательства существования решения системы (3.45) с начальным условием $\hat{z}(0) = 0$ аналогична решению упражнения 2.4.4 из работы [24], где доказывается существование решения для системы, похожей на систему (3.45), по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе с условием того, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентное векторное поле по переменным x .

Рассмотрим N -мерное линейное стохастическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 z_N + \nu A_2 z_N + A_3 z_N + C_1 A_1 z_N = \exp(-C_1 t) \frac{\partial}{\partial t} P_N \zeta_N, \quad t > 0, \quad (3.47)$$

где $\zeta_N = \sum_{i=1}^{2N(N+2)} b_i \beta_i E_i$, $z_N \in H_N$. В силу хорошо известных результатов о существовании и единственности стохастических линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [16; гл. VIII]) уравнение (3.47) имеет единственное решение, которое удовлетворяет начальному условию $z_N(0) = 0$, непрерывно по t и согласовано с фильтрацией F_t . Докажем, что существует подпоследовательность последовательности решений (3.47) с нулевым начальным условием $\{z_N\}_{N=1}^\infty$, которая сходится к $\hat{z}$ в пространстве $\mathcal{H}_T$ при любом $T > 0$ почти наверное. Для этого вначале получим априорную оценку на z_N при помощи формулы Ито и моментного неравенства Дуба, затем, используя похожую технику, докажем, что $z_N - z_M$ сходится к нулю в полном пространстве $L_2(\Omega; \mathcal{H}_T)$ и предельная функция удовлетворяет (3.46).

Шаг 1: априорная оценка. В силу формулы Ито (см., например, [30; гл. IV]) получим

$$\begin{aligned} \|A_1 z_N(t)\|_0^2 &= \int_0^t -2\langle \nu A_2 z_N + A_3 z_N + C_1 A_1 z_N, A_1 z_N \rangle ds \\ &\quad + \frac{1 - \exp(-2C_1 t)}{2C_1} \sum_{i=1}^{2N(N+2)} b_i^2 \|P_N E_i\|_0^2 + 2 \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, d\zeta_N \rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Взяв от обеих частей равенства математическое ожидание, ввиду (3.23), (3.24), (3.25) и того, что $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, имеем

$$\sup_{t \in [0, T]} E \|A_1 z_N\|_0^2 + 2\nu E \int_0^T \|z_N\|_3^2 ds \leq C_2, \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.49)$$

Везде ниже в шаге 1 считаем, что $C_i \geq 0$, $i \geq 2$, – константы, не зависящие от z_N .

В силу леммы 2 из [16; гл. IV, § 4] при $h(t) = |t|$, [31; гл. II, § 1], определения 14 из [16; гл. I, § 22] и упражнения 28 к [16; гл. II], непрерывности вложения h^1 в h^0 , оценок (3.26) и (3.49) существует модификация случайного процесса

$$\left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, E_i \rangle d\beta_i \right|,$$

которая является непрерывным субмартингалом, $i = 1, 2, \dots, 2N(N+2)$. Тогда из моментного неравенства Дуба для непрерывных справа субмартингалов (см., например, [18; гл. II, § 5, и гл. IV, § 7, теорема 4.7.2]) и неравенства Коши–Буняковского для пространства $\mathbb{R}^{2N(N+2)}$ вытекает

$$\begin{aligned} E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, d\zeta_N \rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^{2N(N+2)} b_i E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, E_i \rangle d\beta_i \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{2N(N+2)} b_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2N(N+2)} E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, E_i \rangle d\beta_i \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(b \sum_{i=1}^{2N(N+2)} \sup_{t \in [0, T]} E \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, E_i \rangle d\beta_i \right|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $b = \|\{b_i\}_{i=1}^\infty\|_{l_2}$. Ввиду неравенства Бесселя, непрерывности вложения h^1 в h^0 и изометрии Ито (см., например, [31; гл. II, § 1, предложение 1.1, (II), формула (1.12)]) имеем

$$\begin{aligned} E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, d\zeta_N \rangle \right| &\leq 2 \left(b \sum_{i=1}^{2N(N+2)} \sup_{t \in [0, T]} E \int_0^t \exp(-2C_1 s) \langle A_1 z_N, E_i \rangle^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left(b \sum_{i=1}^{2N(N+2)} E \int_0^T \langle A_1 z_N, E_i \rangle^2 ds \right)^{1/2} = 2 \left(bE \int_0^T \sum_{i=1}^{2N(N+2)} \langle A_1 z_N, E_i \rangle^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(bE \int_0^T \|A_1 z_N\|_0^2 ds \right)^{1/2} \leq C_3 \left(bE \int_0^T \|A_1 z_N\|_1^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.26), (3.49) получим

$$E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_N, d\zeta_N \rangle \right| \leq C_4. \quad (3.50)$$

В силу (3.23)–(3.25), (3.48)–(3.50) имеем

$$E \sup_{t \in [0, T]} \|A_1 z_N(t)\|_0^2 \leq C_2 + 2C_4. \quad (3.51)$$

Следовательно, из (3.25) и (3.49) вытекает априорная оценка

$$\|z_N(t)\|_{L_2(\Omega; \mathcal{H}_T)}^2 = E \sup_{t \in [0, T]} \|z_N(t)\|_2^2 + E \int_0^T \|z_N\|_3^2 ds \leq C_2 + 2C_4 + \frac{1}{2\nu} C_2.$$

Шаг 2: сходимость. Докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{z_N\}_{N=1}^\infty$, сходящаяся в пространстве $\mathcal{H}_T$ почти наверное, и предельная функция совпадает с $\hat{z}$.

Рассмотрим разность $z_{MN} = z_N - z_M$, $M < N$. Очевидно, что $z_{MN}(0) = 0$. В силу свойств ортогонального проектора $P_N P_M = P_M$ и $P_N^2 = P_N$ (см., например, [27; гл. VII, § 2]) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 z_{MN} + \nu A_2 z_{MN} + A_3 z_{MN} + C_1 A_1 z_{MN} = \exp(-C_1 t) \frac{\partial}{\partial t} P_N \zeta_{MN}, \quad t > 0,$$

где

$$\zeta_{MN} = \sum_{i=1}^{2M(M+2)} b_i \beta_i (P_N - P_M) E_i + \sum_{i=2M(M+2)+1}^{2N(N+2)} b_i \beta_i P_N E_i.$$

Ввиду формулы Ито (см., например, [30; гл. IV])

$$\begin{aligned} \|A_1 z_{MN}(t)\|_0^2 &= \int_0^t -2 \langle \nu A_2 z_{MN} + A_3 z_{MN} + C_1 A_1 z_{MN}, A_1 z_{MN} \rangle ds \\ &\quad + \frac{1 - \exp(-2C_1 t)}{2C_1} F_{MN} + 2 \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_{MN}, d\zeta_{MN} \rangle, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где

$$F_{MN} = \sum_{i=1}^{2M(M+2)} b_i^2 \| (P_N - P_M) E_i \|_0^2 + \sum_{i=2M(M+2)+1}^{2N(N+2)} b_i^2 \| P_N E_i \|_0^2.$$

Взяв от обеих частей равенства математическое ожидание в (3.52), из (3.23), (3.24) и (3.25) имеем

$$\sup_{t \in [0, T]} E \|A_1 z_{MN}\|_0^2 + 2\nu E \int_0^T \|z_{MN}\|_3^2 ds \leq \frac{1}{2C_1} F_{MN}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad M < N. \quad (3.53)$$

Действуя аналогично получению оценки (3.51), выводим

$$E \sup_{t \in [0, T]} \|A_1 z_{MN}\|_0^2 \leq \frac{1}{2C_1} F_{MN} + 2E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_{MN}, d\zeta_{MN} \rangle \right|. \quad (3.54)$$

Заметим, что $F_{MN} \rightarrow 0$ при $M, N \rightarrow \infty$. Поэтому нетрудно показать, действуя аналогично получению оценки (3.50), что

$$E \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \exp(-C_1 s) \langle A_1 z_{MN}, d\zeta_{MN} \rangle \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } M, N \rightarrow \infty.$$

Тогда из (3.25), (3.53) и (3.54) вытекает

$$E \sup_{t \in [0, T]} \|z_{MN}(t)\|_2^2 + E \int_0^T \|z_{MN}\|_3^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } M, N \rightarrow \infty.$$

Поэтому фундаментальная последовательность $\{z_N\}_{N=1}^\infty$ сходится к некоторой предельной функции $\bar{z}$ в полном пространстве $L_2(\Omega; \mathcal{H}_T)$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{z_{N_j}\}_{j=1}^\infty$, которая сходится к $\bar{z}$ в пространстве $\mathcal{H}_T$ почти наверное (см., например, [17; гл. II, § 10, п. 4, теорема 2, формула (12), и п. 5, теорема 5]). Ввиду того, что $T > 0$ любое, $\bar{z} \in \mathcal{H}$ почти наверное.

Поскольку по формуле интегрирования по частям (см., например, [30; гл. IV, § 1, теорема 4.1.5])

$$\int_0^t \exp(-C_1 s) dP_{N_j} \zeta_{N_j}(s) = \exp(-C_1 t) P_{N_j} \zeta_{N_j}(t) + C_1 \int_0^t \exp(-C_1 s) P_{N_j} \zeta_{N_j}(s) ds,$$

то в силу (3.47) z_{N_j} удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} A_1 z_{N_j}(t) + \int_0^t (\nu A_2 z_{N_j}(s) + A_3 z_{N_j}(s) + C_1 A_1 z_{N_j}(s)) ds &= \exp(-C_1 t) P_{N_j} \zeta_{N_j}(t) \\ + C_1 \int_0^t \exp(-C_1 s) P_{N_j} \zeta_{N_j}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где равенство имеет место в пространстве $C(0, T; H^{-1})$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Переходя к пределу по норме пространства $C(0, T; H^{-1})$ при $j \rightarrow \infty$ в этом равенстве, учитывая, что $T > 0$ любое, получим, что $\bar{z}$ удовлетворяет уравнению (3.46) в пространстве $C(\mathbb{R}^+; H^{-1})$ для любого $t > 0$ почти наверное. Ввиду того, что все множества P -меры нуль σ -алгебры F содержатся в F_0 и случайный процесс $z_{N_j}(t)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$, $j = 1, 2, \dots$, по лемме 6 из [16; гл. I, § 5] и [16; гл. I, § 4] следует, что случайный процесс $\bar{z}(t)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Тогда в силу единственности решения системы (3.45) $\bar{z}(t) = \hat{z}(t)$ для любого $t \geq 0$ с вероятностью 1.

Существование решения системы (3.45) доказано. Заметим, что в случае, когда $C_1 = 0$, легко получить из представленного доказательства существование решения системы (3.45) и, следовательно, (3.4).

Пусть $C_1 > 0$. Поскольку в силу формулы Ито (см., например, [30; гл. IV])

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1(\exp(C_1 t) z_{N_j}) = C_1 \exp(C_1 t) A_1 z_{N_j} + \exp(C_1 t) \frac{\partial}{\partial t} A_1 z_{N_j},$$

то ввиду (3.47)

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1(\exp(C_1 t) z_{N_j}) + (\nu A_2 + A_3)(\exp(C_1 t) z_{N_j}) = \frac{\partial}{\partial t} P_{N_j} \zeta_{N_j}, \quad t > 0.$$

Тогда при $0 \leq t \leq T$

$$A_1(\exp(C_1 t) z_{N_j}(t)) + \int_0^t (\nu A_2 + A_3)(\exp(C_1 s) z_{N_j}(s)) ds = P_{N_j} \zeta_{N_j}(t),$$

где равенство имеет место в пространстве $C(0, T; H^{-1})$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ в этом равенстве, получим, что $\exp(C_1 t) \hat{z}$ удовлетворяет равенству (3.5) для почти всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, в силу единственности решения системы (3.4) $z(t) = \exp(C_1 t) \hat{z}(t)$ для любого $t \geq 0$ с вероятностью 1.

Существование решения системы (3.4) с начальным условием $z(0) = 0$ доказано.

Предложение доказано.

В следующей теореме доказывается результат о существовании единственного решения задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1), а также доказывается оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности случайных начальных данных и внешней силы на конечном отрезке изменения переменной t .

ТЕОРЕМА 2. I. Для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, случайного векторного поля $f(t)$, $t \geq 0$, согласованного с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$, $f \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$ почти наверное, и F_0 -измеримого случайного векторного поля u_0 , $u_0 \in H^2$ почти наверное, система (1.1), (1.2) имеет решение $u(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию (3.1) почти наверное.

II. Это решение единственно, т.е. если $\tilde{u}(t)$ – другое решение системы (1.1), (1.2), удовлетворяющее начальному условию (3.1) почти наверное, то $u(t) = \tilde{u}(t)$ для любого $t \geq 0$ с вероятностью 1.

Обозначим через M_f множество случайных векторных полей, определенных при $t \geq 0$, согласованных с $\{F_t\}_{t \geq 0}$, принадлежащих почти наверное пространству $L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$, и через M_{u_0} множество F_0 -измеримых случайных векторных полей, принадлежащих почти наверное пространству H^2 . Пусть $u(t, x, \omega, f, u_0)$ – решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) со случайными внешней силой f и начальным данным u_0 .

III. Для любых $T > 0$ и случайных величин $R_1(\omega), R_2(\omega) \geq 0$ существует такая случайная величина $C(\omega, T, R_1(\omega), R_2(\omega)) \geq 0$, что почти наверное имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|u(t, x, \omega, f^I, u_0^I) - u(t, x, \omega, f^{II}, u_0^{II})\|_{\mathcal{K}_T} \\ & \leq C(\omega) (\|f^I(t, x, \omega) - f^{II}(t, x, \omega)\|_{L_2(0, T; H^{-1})} + \|u_0^I(x, \omega) - u_0^{II}(x, \omega)\|_2), \end{aligned}$$

где $f^I, f^{II} \in M_f$, $\|f^I\|_{L_2(0, T; H^{-1})}, \|f^{II}\|_{L_2(0, T; H^{-1})} \leq R_1$ почти наверное, $u_0^I, u_0^{II} \in M_{u_0}$, $\|u_0^I\|_2, \|u_0^{II}\|_2 \leq R_2$ почти наверное – произвольные элементы соответствующих множеств, C не зависит от $f^I, f^{II}, u_0^I, u_0^{II}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Схема доказательства существования аналогична схеме доказательства теоремы 2.4.6 из работы [24], где доказывается существование решения для уравнения Навье–Стокса с правой частью (1.2) по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе с условием того, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентное векторное поле по переменным x .

Пусть $z(t)$ – решение системы (3.4) с начальным условием $z(0) = 0$ (см. предложение 1). Определим $v \in \mathcal{K}$ на Ω следующим образом: $v(t)$ – решение задачи Коши (3.7) (см. теорему 1) для $\omega \in \Omega_*$, где Ω_* определено в (3.6), и $v(t) \equiv 0$ для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_*$. Тогда из свойств измеримых отображений, согласованности случайных процессов $f(t)$, $t \geq 0$, и $z(t)$, $t \geq 0$, с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и построения решения задачи Коши (3.7) через аппроксимации вытекает, что случайный процесс $v(t)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Поэтому в силу предложения 1 и теоремы 1 случайный процесс $u(t) = v(t) + z(t)$ – решение системы (1.1), (1.2), удовлетворяющее начальному условию (3.1) почти наверное.

II. Доказательство единственности полностью аналогично доказательству единственности в теореме 1, но при этом необходимо оценивать не дифференциальное уравнение, а интегральное в силу определения решения.

III. Этот факт сразу следует из доказательства соответствующего результата для v о равномерной непрерывности по Липшицу оператора, сопоставляющего множеству входящих в задачу параметров решение задачи Коши (3.7).

Теорема доказана.

Из леммы 4.5.3 в [18; гл. IV, § 5] и того, что (Ω, F, P) – полное вероятностное пространство, F_0 содержит все множества P -меры нуль σ -алгебры F , вытекает

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 2, п. I решение $u(t)$ задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) является прогрессивно измеримым по отношению к $\{F_t\}_{t \geq 0}$ случайным процессом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [4; гл. VI, § 1] и [32] рассматривалась немного другая двухслойная модель бароклинической атмосферы на единичной двумерной сфере S с центром в нуле. Система уравнений этой модели после обезразмеривания отличается от системы (1.1) только оператором A_3 . А именно, в [4; гл. VI, § 1] и [32] оператор A_3 имел следующий вид:

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} -k\Delta & -k\Delta \\ -k\Delta & -(k + k_1)\Delta + \rho \end{pmatrix}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что для такой системы выполнены дословно результаты предложения 1, замечания 1, теорем 1, 2 и следствия.

Список литературы

- [1] V. N. Krupchatnikov, “Global attractors for the Lorentz model on the sphere”, *Bull. Novosib. Comput. Cent., Ser. Numer. Model. Atmos. Ocean Environ. Stud.*, **2** (1995), 31–40.
- [2] E. N. Lorenz, “Energy and numerical weather prediction”, *Tellus*, **12**:4 (1960), 364–373.

- [3] В. Н. Крупчатников, Г. П. Курбаткин, *Моделирование крупномасштабной динамики атмосферы. Методы диагноза общей циркуляции*, ВЦ, Сиб. отд-ние АН СССР, Новосибирск, 1991.
- [4] В. П. Дымников, А. Н. Филатов, *Основы математической теории климата*, ВИНТИ, М., 1994; англ. пер.: V. P. Dymnikov, A. N. Filatov, *Mathematics of climate modeling*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser, Boston, MA, 1997.
- [5] Б. В. Пальцев, *Сферические функции*, МФТИ, М., 2000.
- [6] Ю. Н. Скиба, *Математические вопросы динамики вязкой баротропной жидкости на вращающейся сфере*, ОВМ АН СССР, М., 1989.
- [7] В. П. Дымников, *Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов*, ИВМ РАН, М., 2007.
- [8] М. С. Агранович, “Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы”, *УМН*, **20**:5 (1965), 3–120; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Elliptic singular integro-differential operators”, *Russian Math. Surveys*, **20**:5 (1965), 1–121.
- [9] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
- [10] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Гостехиздат, М.–Л., 1952; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *The problem of the minimum of a quadratic functional*, Holden-Day, San Francisco–London–Amsterdam, 1965.
- [11] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1965.
- [12] С. Г. Михлин, “Дифференцирование рядов по сферическим функциям”, *Докл. АН СССР*, **126**:2 (1959), 278–279.
- [13] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [14] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [15] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [16] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005.
- [17] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, т. 1: *Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы*, МЦНМО, М., 2004.
- [18] O. Knill, *Probability theory and stochastic processes with applications*, Overseas Press, New Delhi, 2009.
- [19] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia Math. Appl., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [20] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, ГИФМЛ, М., 1961; англ. пер.: I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions. Vol. 4: Applications of harmonic analysis*, Academic Press, New York–London, 1964.
- [21] Yu. N. Skiba, “Spectral approximation in the numerical stability study of nondivergent viscous flows on a sphere”, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **14**:2 (1998), 143–157.
- [22] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 7-е изд., Физматлит, М., 2004; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov,

- S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. I, II, Graylock Press, Albany, NY, 1957, 1961.
- [23] Ю. Н. Скиба, *Об однозначной разрешимости уравнения баротропного вихря вязкой жидкости в классах обобщенных функций на сфере*, Препринт №194, ОВМ АН СССР, М., 1988.
- [24] S. Kuksin, A. Shirikyan, *Mathematics of two-dimensional turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [25] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
- [26] М. С. Агранович, *Обобщенные функции*, МЦНМО, М., 2008.
- [27] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965; англ. пер.: L. A. Lusternik, V. I. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Hindustan Publ., Delhi, 1971.
- [28] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985; англ. пер.: A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **18**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.
- [29] Г. В. Демиденко, *Введение в теорию соболевских пространств*, Учебное пособие, Изд-во Новосиб. ун-та, Новосибирск, 1995.
- [30] Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*, Мир, М., 2003; пер. с англ.: B. Øksendal, *Stochastic differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [31] Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1981.
- [32] А. С. Горелов, “Размерность аттрактора двуслойной бароклининой модели”, *Докл. РАН*, **342**:1 (1995), 101–104.

Ю. Ю. Клевцова (Yu. Yu. Klevtsova)

Сибирский региональный научно-исследовательский
гидрометеорологический институт, г. Новосибирск
E-mail: yy_klevtsova@ngs.ru

Поступила в редакцию
13.05.2011 и 26.04.2012