

ЧИСЛЕННОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

К.В. Басова, В.А. Огородников

*Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН,
Новосибирск*

Рассматриваются численные стохастические модели совместных временных рядов различных метеорологических элементов (температура воздуха, модуль скорости ветра, относительная влажность и т.д.) и их комплексов, учитывающих одномерные распределения и матричные корреляционные функции реальных. Для построения моделей используется приближения стационарных, векторных стационарных, периодически коррелированных случайных и нестационарных процессов. В нестационарных моделях учитывается суточный ход параметров распределений и корреляционных связей. Учет одномерных распределений осуществляется с использованием специальных нелинейных преобразований гауссовых процессов и различных модификаций метода обратных функций распределения. На основе этих моделей исследуются вероятностные свойства опасных метеорологических явлений (длительные понижения, резкие перепады температуры воздуха, неблагоприятные сочетания метеорологических элементов и т.д.). Оценка параметров и численная верификация моделей проведены с использованием данных 8-срочных метеорологических наблюдений (метеостанции «Астрахань» и «Свердловск»).

Работа посвящена разработке численных стохастических моделей реальных метеорологических временных рядов с учетом суточной и сезонной нестационарности для решения прикладных задач статистической метеорологии.

Одномерные распределения вероятностей метеорологических элементов, как правило, существенно отличаются от нормальных. При этом они испытывают суточный ход, причем периодически меняются различные характеристики процесса - средние значения, дисперсии, коэффициенты корреляции и др. Это существенным образом влияет на изменение характеристик метеорологических рядов, например, вероятностей заморозков, вероятностей резких перепадов температур и т.д. В работе рассматриваются различные подходы к учету различного типа нестационарности. Для построения стохастических численных моделей используются специальные алгоритмы моделирования нестационарных негауссовских процессов, в частности, алгоритмы моделирования периодически коррелированных процессов [1,2,11]. С помощью моделей исследуются некоторые характеристики, связанные с выбросами случайных процессов [5,10].

Оценка параметров моделей и численная верификация проведены с использованием данных многолетних 8-срочных метеорологических наблюдений, которые представлены в виде синхронных рядов значений приземной температуры воздуха, модуля скорости приземного ветра, относительной влажности и др. для метеостанций «Астрахань» и «Свердловск».

1. Модели периодически коррелированных процессов

Подход к построению периодически коррелированных случайных процессов состоит в представлении этого процесса в виде векторного процесса с

блочной-теплицевой ковариационной матрицей. Период определяется размерностью векторов в этом векторном процессе, например, числом измерений в сутки, а значения компонентов соответствуют значениям метеорологического элемента в соответствующие сроки наблюдения. Средние, дисперсии и корреляционная функция периодически коррелированного процесса удовлетворяют следующим соотношениям [1]:

$$E\xi(t_i + p) = E\xi(t_i), D\xi(t_i + p) = D\xi(t_i), R_\xi(t_i + p, t_j + p) = R_\xi(t_i, t_j). \quad (1)$$

Способ моделирования гауссовых последовательностей, удовлетворяющих этим условиям, основан на моделировании стационарно связанных гауссовых p -мерных векторов $\vec{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ip})^T$, совокупность которых при $i = 1, \dots, n$ можно представить в виде вектора

$$\vec{\xi}_{(n)} = (\vec{\xi}_1^T, \vec{\xi}_2^T, \dots, \vec{\xi}_n^T)^T \quad (2)$$

с нулевым средним и заданной вещественной ковариационной матрицей блочно-теплицева вида

$$R_{(n)} = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{n-1} \\ R_1^T & R_0 & \dots & R_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n-1}^T & R_{n-2}^T & \dots & R_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $R_k, k = 0, \dots, n-1$ - матрицы $p \times p$. Представим вектор (2) в виде

$$\vec{\xi}_{(n)} = (\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{p1}, \xi_{12}, \xi_{22}, \dots, \xi_{p2}, \dots, \xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{pn})^T. \quad (4)$$

Последовательность компонентов данного вектора является периодически коррелированной [2,11]. Отметим, что специфика периодической коррелированности последовательности (4) определяется структурой блоков R_k матрицы $R_{(n)}$.

Алгоритм численного моделирования последовательности гауссовских векторов $\vec{\xi}_i, i = 1, \dots, n$ с корреляционной матрицей (3) основан на методе «условных распределений» [3,6], который реализуется по схеме

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1 &= C_0 \vec{\phi}_1, \\ \vec{\xi}_2 &= \vec{B}^T [1] J_{(1)} \vec{\xi}_{(1)} + C_1 \vec{\phi}_2, \\ &\dots \\ \vec{\xi}_n &= \vec{B}^T [n-1] J_{(n-1)} \vec{\xi}_{(n-1)} + C_{n-1} \vec{\phi}_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n$ - независимые гауссовские векторы размерности p с независимыми компонентами,

$$\vec{\xi}_{(k)} = (\vec{\xi}_1^T, \dots, \vec{\xi}_k^T)^T, \vec{B}[k] = (B_1^T[k], \dots, B_k^T[k])^T, k = 1, \dots, n-1,$$

$B_i[k]$ - матрицы размера $p \times p$, а C_i - нижние треугольные матрицы размера $p \times p$, которые вычисляются с помощью решения линейных уравнений вида

$$\tilde{R}_{(k)}\tilde{B}[k]=\tilde{R}_k, \quad (6)$$

где

$$\tilde{R}_{(k)}=J_{(k)}R_{(k)}J_{(k)}, \quad J_{(k)}=\begin{vmatrix} 0 & \dots & I_p \\ \dots & \dots & \dots \\ I_p & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица Q_k связана с $R_{(k)}$ и $\tilde{B}[k]$ следующим соотношением:

$$Q_k=R_0-\tilde{B}^T[k]\tilde{R}_{(k)}\tilde{B}[k].$$

Решение системы (1.9) с учетом блочно-теплицевой структуры матрицы $R_{(n)}$ сводится к следующему рекурсивному алгоритму:

$$\begin{aligned} B_1^T[1]&=R_1^T R_0^{-1}, \quad \tilde{B}_1^T[1]=R_1 R_0^{-1}, \\ Q_0&=R_0, \quad \tilde{Q}_0=\tilde{R}_0, \\ (B_1^T[k+1], \dots, B_k^T[k+1])&=\tilde{B}^T[k]-B_{k+1}^T[k+1]\tilde{B}^T[k]J_{(k)}, \\ (\tilde{B}_1^T[k+1], \dots, \tilde{B}_k^T[k+1])&=\tilde{B}^T[k]-\tilde{B}_{k+1}^T[k+1]\tilde{B}^T[k]J_{(k)}, \\ B_{k+1}[k+1]&=\tilde{Q}_k^{-1}(R_{k+1}-\tilde{R}_k^T J_{(k)}\tilde{B}[k]), \\ \tilde{B}_{k+1}[k+1]&=Q_k^{-1}(R_{k+1}^T-\tilde{R}_k^T J_{(k)}\tilde{B}[k]), \\ Q_k&=R_0-\tilde{R}_k^T\tilde{B}[k], \quad \tilde{Q}_k=R_0-\tilde{R}_k^T\tilde{B}[k], \\ C_k C_k^T&=Q_k, \end{aligned}$$

где $\tilde{R}_k=(R_1^T, \dots, R_k^T)^T$, $\tilde{R}_k=(R_1, \dots, R_k)^T$, $k=1, \dots, n-1$.

Для моделирования длинных последовательностей

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_{2p}, \dots, \xi_{(n-1)p+1}, \xi_{(n-1)p+2}, \dots, \xi_{np}, \dots$$

может быть использована многомерная модель авторегрессии порядка n в виде

$$\tilde{\xi}_t=B_1^T[n]\tilde{\xi}_{t-1}+\dots+B_n^T[n]\tilde{\xi}_{t-n}+C_n\tilde{\varphi}_t,$$

где в качестве начальных векторов используются векторы $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n$. Если выполняются условия стационарности процесса авторегрессии [3], то для него также выполняется соотношение (1).

Для построения негауссовских рядов используется метод обратных функций распределения. Элемент η_{ij} случайной последовательности $\vec{\eta}_{(n)}=(\vec{\eta}_1^T, \vec{\eta}_2^T, \dots, \vec{\eta}_n^T)^T$ с одномерным распределением $F_{ij}(x)$ и корреляционной матрицей $K_{(n)}$ моделируется с помощью преобразования

$$\eta_{ij}=F_{ij}^{-1}(\Phi(\xi_{ij})),$$

где $\Phi(x)$ функция стандартного нормального распределения, а ξ_{ij} гауссовский ряд с корреляционной матрицей $R_{(n)}$. Элемент $k_{ij,kl}$ корреляционной матрицы $K_{(n)}$ ряда $\vec{\eta}_{(n)} = (\vec{\eta}_1^T, \vec{\eta}_2^T, \dots, \vec{\eta}_n^T)^T$ является функцией $k_{ij,kl} = f(r_{ij,kl})$ элементов матрицы $R_{(n)}$, вид которой определяется преобразованием $\eta_{ij} = F_{ij}^{-1}(\Phi(\xi_{ij}))$. Подробно свойства этого метода изложены в работах [8].

Для воспроизведения заданных распределений используется специальная модификация метода обратных функций распределения, основанная на нормализации исходного ряда [4].

2. Численное моделирование временных рядов температуры воздуха

Модели временных рядов приземной температуры воздуха построены в гауссовском приближении, при этом использовалось приближение стационарного и периодически коррелированного процесса. В случае стационарного приближения рассматривались модели для каждого срока наблюдений отдельно, а также модели для среднесуточной температуры. В случае периодически коррелированного приближения модель строилась с трехчасовым шагом с учетом суточной периодичности параметров распределения.

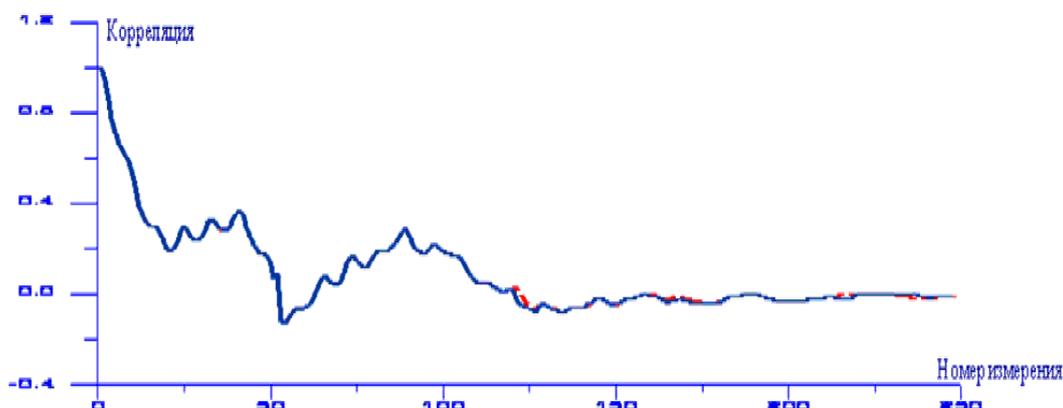


Рис.1. Корреляционные функции реального (пунктирная линия) и смоделированного в стационарном приближении (сплошная) рядов (январь, Астрахань)

Оценка по реальным данным матричной ковариационной функции проводилась с помощью стандартной формулы для стационарного векторного процесса.

3. Вероятности заморозков для весенне-летнего периода

Рассматривается стохастическая модель временных рядов температуры воздуха для весенне-летнего периода (середина мая - середина июня), построенная с использованием данным наблюдений на метеостанции «Свердловск». При построении модели учитывается суточный ход параметров распределения, а также линейная зависимость среднего значения от номера

суток в рассматриваемом интервале. Рассматриваются вероятности того, что температура ξ_t опустится ниже уровня c по крайней мере на L сроков

$$P(\xi_{ip+l} < c, \xi_{ip+l+1} < c, \dots, \xi_{ip+l+L} < c) = P_{i,l}(c, L), \quad i \geq 1, \quad 1 \leq l \leq p,$$

где i - номер суток. В данном случае длительность ночных заморозков сравнительно невелика (порядка 3-6 час.). Чтобы не вносить неопределенность в длительность, более удобно выразить величину длительности понижений температуры в количестве стандартных сроков наблюдения, чем в часах.

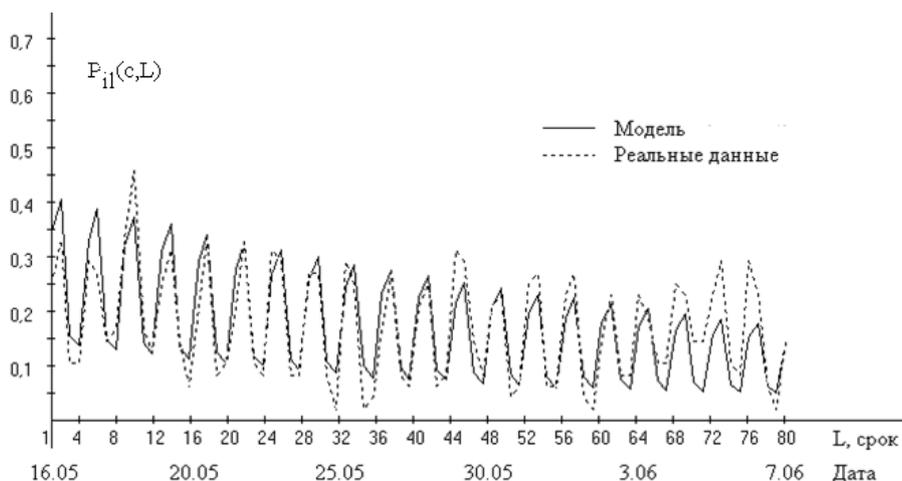


Рис. 2. Вероятность $P_{i,l}(c, L)$; $c = 6^0 C$, $L = 1$, $i = 1, \dots, 30$, $l = 1, \dots, p$,
Свердловск, май-июнь.

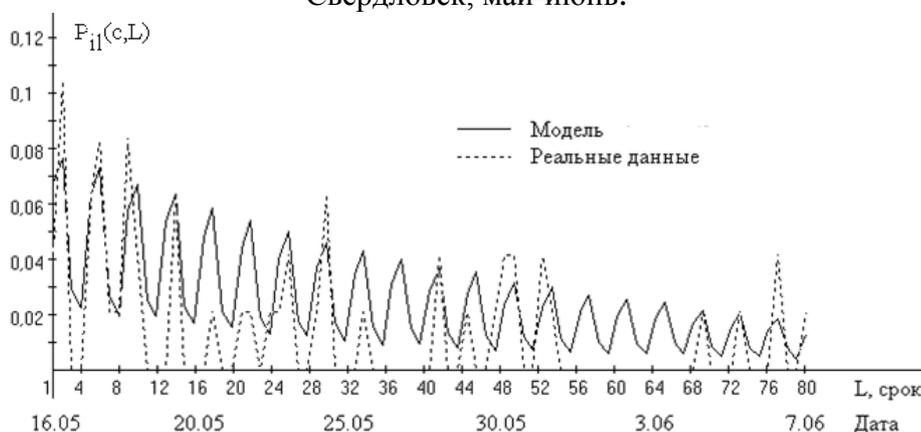


Рис. 3. Вероятности $P_{i,l}(c, L)$; $c = 0^0 C$, $L = 1$, $i = 1, \dots, 30$, $l = 1, \dots, p$,
Свердловск, май-июнь.

На Рис. 2. приведены результаты верификации модели. Видно, что для уровней, близких к средней температуре, модель достаточно точно описывает реальный процесс. Следует отметить, что средняя температура является функцией от времени, в данной модели для каждого срока в отдельности она считается линейной функцией в рассматриваемом интервале, поэтому вероятность имеет тенденцию к уменьшению при сохранении периодичности. Приведенные на Рис. 3. графики соответствуют вероятностям заморозков, по

крайней мере, в течение одного срока наблюдений. Сравнение модельной и фактической кривых свидетельствует о том, что модель не противоречит реальным данным. Оценка этих вероятностей по реальным данным имеет достаточно большую относительную погрешность, в ряде случаев превосходящую допустимую, например, в некоторых случаях ее значения равны нулю, хотя вероятность заморозков в это время года не является нулевой. Поэтому оценки, полученные по модели, могут быть использованы в качестве соответствующей дополнительной информации.

4. Сильные перепады температуры

Рассмотрим вероятность $P(|\xi_{ip+l} - \xi_{jp+m}| \geq c)$, $i, j \geq 1$, $1 \leq l, m \leq p$ того, что температура изменится на c °C градусов в течение определенного временного интервала, где ξ - периодически коррелированный процесс. В качестве примера приведем значения этих вероятностей, рассчитанные по модели и по реальным данным для весенне-летнего периода (см. Рис.4). Модуль относительной разности между оценками этих вероятностей по реальным данным и по модели увеличивается с увеличением перепада c и при $c = 12$ °C может превосходить 100%. Следует иметь в виду, что оценки этих вероятностей по реальным данным при достаточно больших перепадах c являются крайне ненадежными.

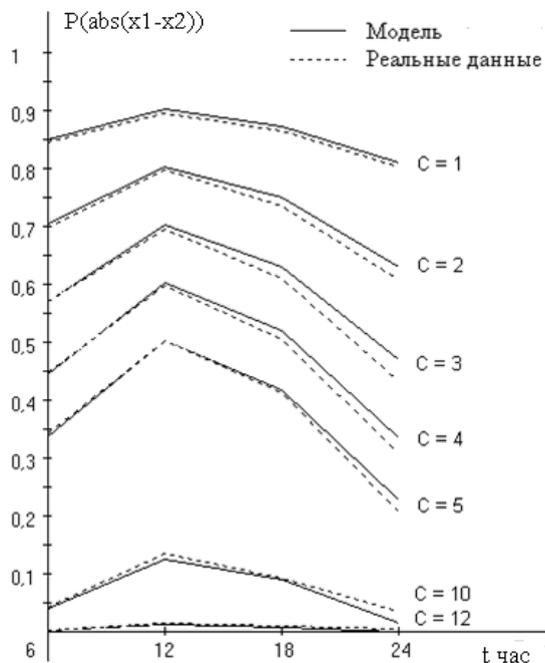


Рис. 4. Вероятность $P(|\xi_{ip+l} - \xi_{jp+m}| \geq c)$ того, что температура изменится на $c = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 12$ °C за 6, 12, 18, 24 часов, Астрахань, (май-июнь).

В этих случаях можно ориентироваться на оценки по модели, либо использовать их в качестве дополнительной информации, при условии, что при сравнительно

небольших перепадах c , где еще погрешности оценок невелики, модельные и эмпирические вероятности хорошо согласуются друг с другом.

5. Стохастические модели совместных временных рядов различных метеоэлементов

На практике модели совместных гидрометеорологических рядов могут быть использованы для оценки вероятностей неблагоприятных сочетаний метеорологических параметров. Моделирование совместных временных рядов позволяет получить модельные оценки этих вероятностей, в то время как непосредственно по реальным данным из-за ограниченности объема выборки такие оценки получить затруднительно.

В качестве примера на Рис.5 приведены вероятности неблагоприятных сочетаний относительной влажности и температуры воздуха, длящихся на протяжении заданного промежутка времени. В частности, рассматриваются вероятности

$$P(A_1, B_1) = P_1(K, c_1, c_2),$$

$$A_1 = (\xi_{t+0\Delta t} > c_1, \dots, \xi_{t+k\Delta t} > c_1), B_1 = (\eta_{t+0\Delta t} > c_2, \dots, \eta_{t+k\Delta t} > c_2), K = k\Delta t$$

того, что значения рядов ξ_t и η_t превышают соответствующие уровни c_1 и c_2 в течение K часов. Здесь $\Delta t = 3$ час. - интервал времени между измерениями, $t, k = 0, 1, \dots$

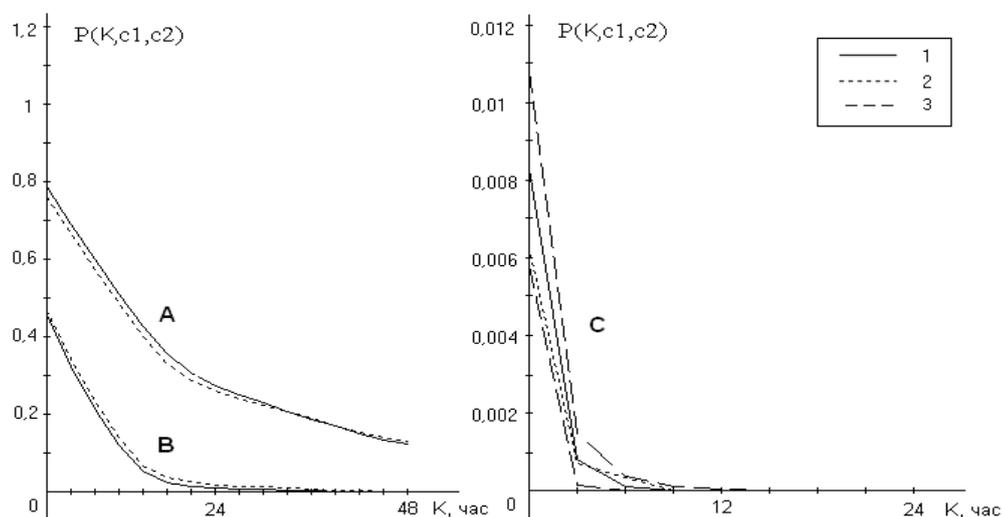


Рис.5 Вероятности событий: A= ($T > 15^\circ C$, $H > 40\%$), B= ($T > 15^\circ C$, $H > 60\%$), C= ($T > 25^\circ C$, $H > 80\%$), происходящие в течение K часов, Астрахань, июль. 1- модель, 2 – реальные данные, 3 – доверительные интервалы (90%).

Приведенные на Рис. 5 (A, B) графики описывают вероятности достаточно часто встречающихся ситуаций и в реальной выборке таких событий достаточно много, поэтому статистические погрешности оценок относительно невелики. По этим характеристикам можно судить о качестве модели. Если уровни c_1 и c_2 существенно удалены от средних значений (см. Рис. 5, C), то число

соответствующих событий в выборке мало и оценки по реальным данным имеют существенные статистические погрешности. Модельные оценки можно строить по выборкам сколь угодно большого объема, поэтому в тех случаях, когда оценки по реальным данным не надежны, модельные оценки можно использовать как дополнительную информацию, а модельные выборки, например, использовать для построения соответствующих доверительных интервалов.

6. Численные модели нестационарных временных рядов температуры и скорости ветра (Ильина А.А, аспирант ИВМиМГ СО РАН)

При построении нестационарных моделей временных рядов метеоэлементов и их комплексов получить надежные оценки характеристик ряда, зависящих от времени при имеющихся объемах выборки весьма затруднительно. В этих случаях модели нестационарных процессов воспроизводят некие приближенные изменения характеристик процесса во времени.

Важным этапом построения нестационарных моделей является выбор одномерных распределений как функции от времени. В ряде случаев в качестве таких распределений могут быть использованы смеси различных распределений [7,9], параметры которых зависят от времени. В качестве критерия качества аппроксимации реальных распределений смесями использовалась степень близости асимметрии и эксцесса по модельным и фактическим данным.

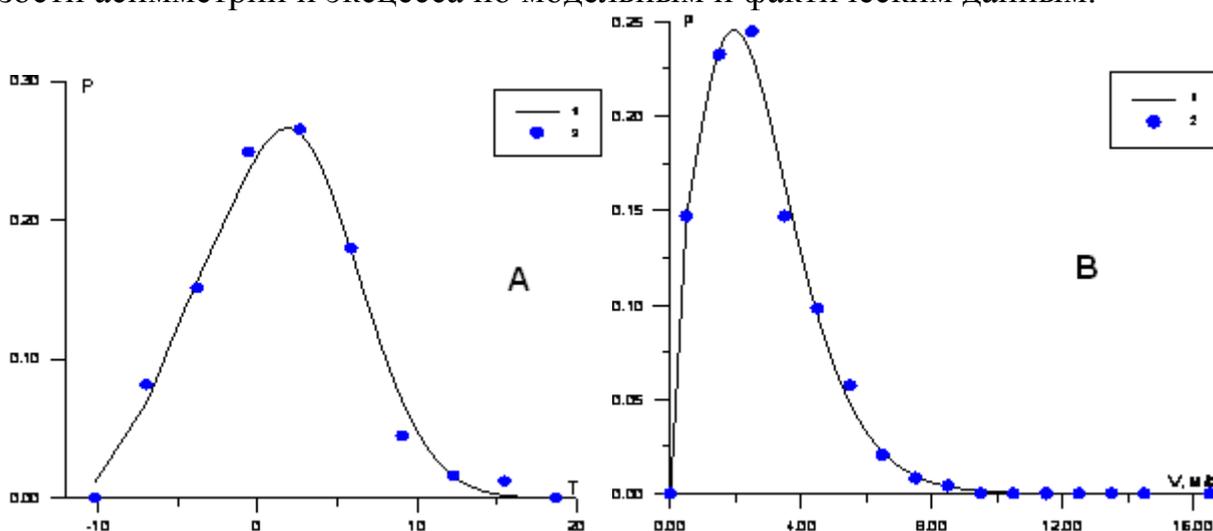


Рис. 6: А- аппроксимация температуры смесью двух нормальных распределений, В - аппроксимация модуля скорости ветра смесью двух гамма-распределений 1 – фактическое, 2 – модельное распределения.

Примеры аппроксимаций для температуры и модуля скорости ветра приведены на Рис.6. На Рис. 7 на примере средних значений модуля скорости ветра приведена зависимость от времени параметров распределений.

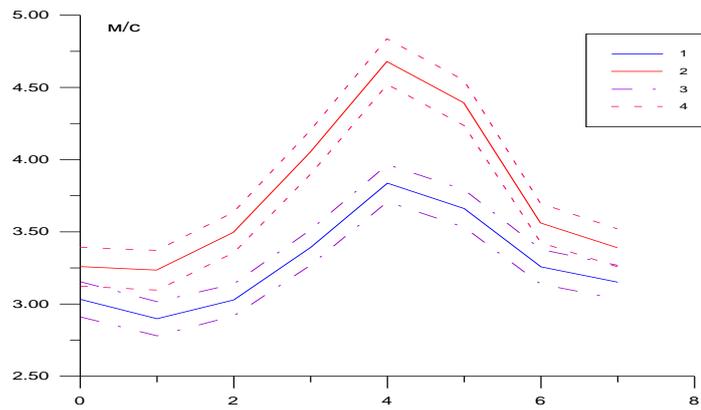


Рис. 7. Средние значения модуля скорости ветра в течение суток с интервалом в месяц. График 1 – средние значения для 23 января, график 2 – средние значения для 24 февраля; 3, 4 – границы статистической погрешности для оценок 1 и 2 соответственно.

На Рис.8 приведены графики, демонстрирующие качество воспроизведения в модели входных характеристик – средних, среднеквадратических отклонений как функций от времени и элементов корреляционной матрицы.

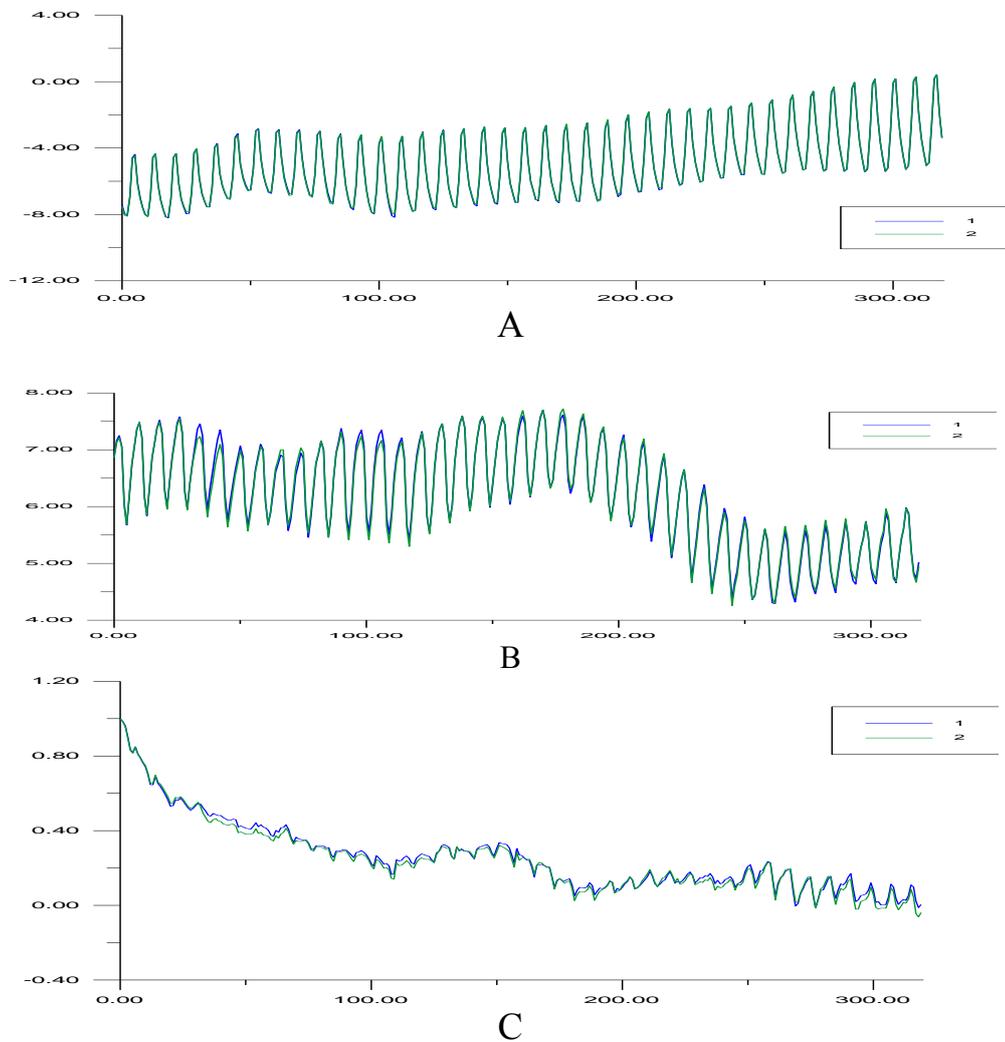


Рис. 8: А - средние, В – среднеквадратические отклонения, С – первая строка корреляционной матрицы, 1 – реальные данные, 2 – результат моделирования.

7. Результаты для совместной модели температуры воздуха и модуля скорости ветра

Проверка пригодности модели для решения конкретных прикладных задач осуществляется на этапе верификации. На этом этапе по модельным выборкам и по реальному ряду оценивается некоторый набор характеристик, связанных со спецификой решаемой задачи, но не являющихся входными для модели. Степень близости соответствующих характеристик служит критерием качества модели.

На Рис.9 приведены результаты оценки вероятностей длительных сочетаний значений температуры и ветра.

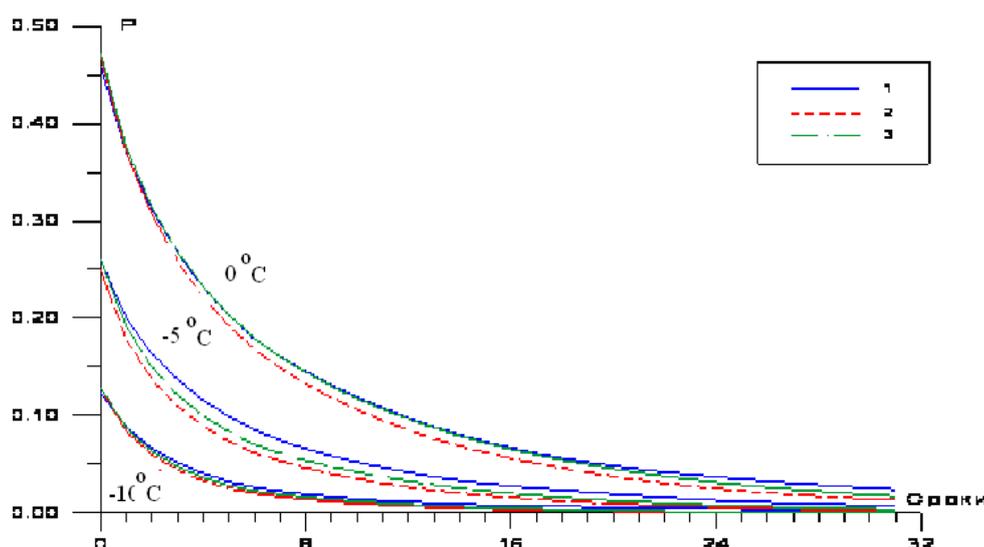


Рис.9. Вероятность $P\left(\xi_t^{(1)} < a, \dots, \xi_{t+\tau}^{(1)} < a; \xi_t^{(2)} > b, \dots, \xi_{t+\tau}^{(2)} > b\right)$ для значений $a = -10, -5, 0^{\circ}\text{C}$, $b = 2,5$ м/с. 1 – оценки по реальным данным, 2 – по векторно-стационарной модели, 3 – по нестационарной модели.

На Рис. 10 приведены вероятности $P\left(\xi_t^{(1)} < a, \dots, \xi_{t+\tau}^{(1)} < a; \xi_t^{(2)} > b, \dots, \xi_{t+\tau}^{(2)} > b\right)$ для значений $a = 0^{\circ}\text{C}$, $b = 2,5$ м/с по реальным данным, по векторно-стационарной модели и по нестационарной модели, а также стандартные отклонения от модельной оценки, вычисленные по объему выборки, совпадающему с объемом реальных данных.

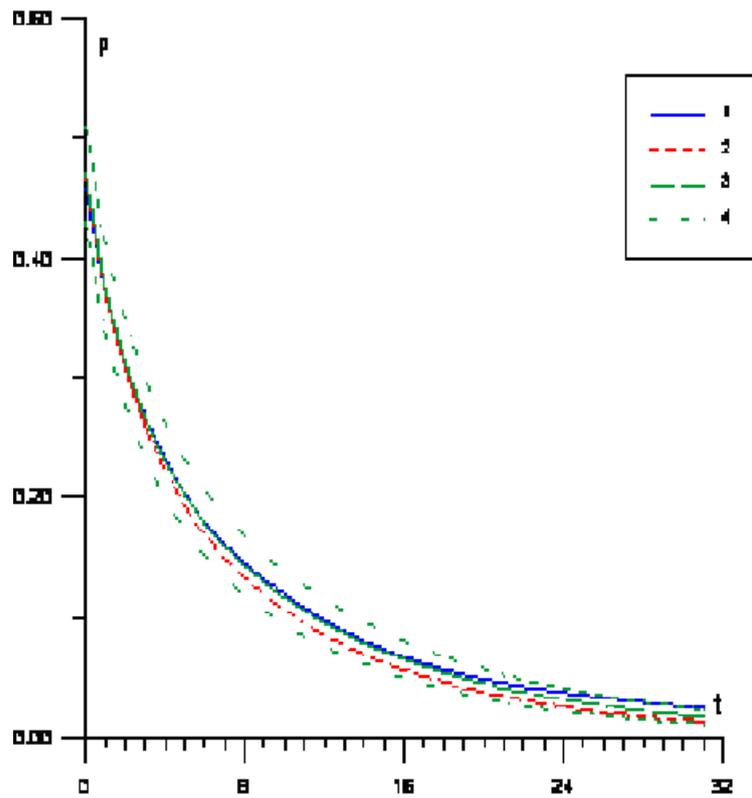
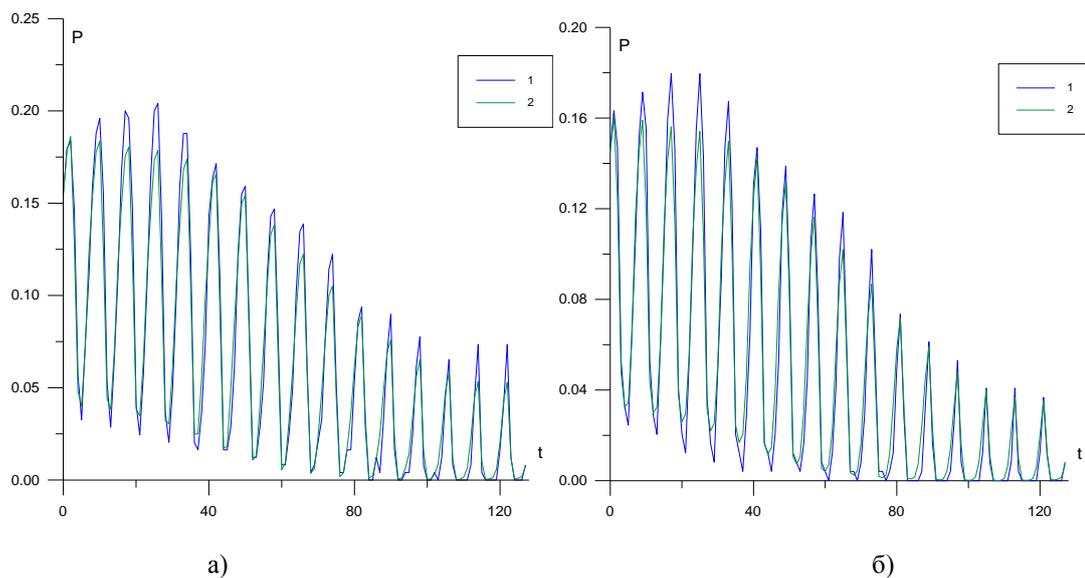


Рис.10 Вероятность $P\left(\xi_t^{(1)} < a, \dots, \xi_{t+\tau}^{(1)} < a; \xi_t^{(2)} > b, \dots, \xi_{t+\tau}^{(2)} > b\right)$ для значений $a = 0^0 \text{ C}$, $b = 2,5 \text{ м/с}$. 1 – оценки по реальным данным, 2 – по векторно-стационарной модели, 3 – по нестационарной модели, 4 - границы стандартного отклонения от модельной оценки по объему выборки 35 значений.

На Рис. 11 приведены некоторые результаты оценки вероятностей длительного выхода температуры ниже заданного уровня как функции от времени.



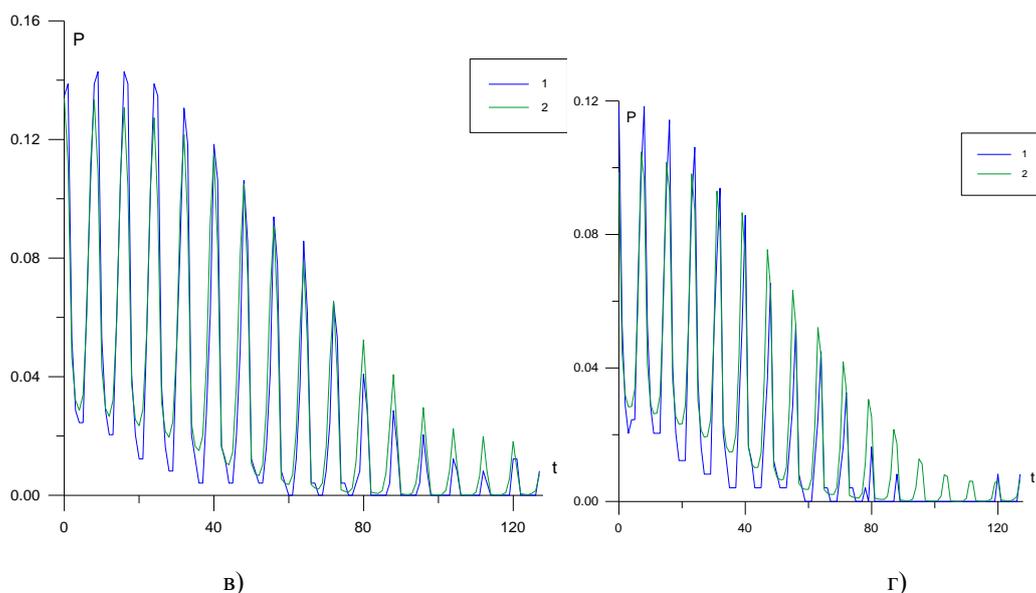


Рис. 11. Сглаженные оценки вероятности понижения температуры ниже уровня -15°C длительностью а) 3 часа, б) 6 часов, в) 9 часов, г) 12 часов. 1 – оценки по реальным данным, 2 – по модельным данным.

В пунктах 6,7 все расчеты проведены аспирантом ИВМиМГ СО РАН А.А. Ильиной.

Заключение

Построены численные стохастические модели совместных временных рядов различных метеорологических элементов (температура воздуха, модуль скорости ветра, относительная влажность и т.д.) и их комплексов, учитывающих одномерные распределения и матричные корреляционные функции реальных процессов.

Использованы приближения стационарных, векторных стационарных, периодически коррелированных случайных и нестационарных процессов. В нестационарных моделях учитывается суточный ход параметров распределений и корреляционных связей метеоэлементов.

Для моделирования гауссовских совместных рядов используются алгоритмы, основанные на методе условных распределений. Последующие специальные преобразования гауссовых процессов и различные модификации метода обратных функций распределения позволяют учесть негауссовый характер распределений.

На основе численных стохастических моделей временных рядов исследованы вероятностные свойства некоторых характеристик выбросов метеорологических элементов (длительные понижения температуры, резкие перепады температуры воздуха, неблагоприятные сочетания метеорологических элементов и т.д.).

Полученные модельные оценки можно использовать как дополнительную информацию в задачах исследования опасных метеорологических явлений, а

модельные выборки, например, использовать для построения соответствующих доверительных интервалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов.- Л.: Гидрометеиздат, 1987. - 320 с.
2. Боков В.Н., Лопатухин Л.И., Микулинская С.М., Рожков В.А., Румянцева С.А. О межгодовой изменчивости волнения // Проблемы исследования и математического моделирования ветрового волнения.- С.-Петербург, Гидрометеиздат, 1995. С. 446-454.
3. V. A. Ogorodnikov, S. M. Prigarin. Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications, Utrecht: VSP. The Netherlands, 1996.
4. Марченко А.С., Сёмочкин А.Г. ФФФФ - метод моделирования временных рядов по наблюдаемым реализациям. // Численные методы статистического моделирования. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1987.- С.14-22.
5. Тихонов В.А., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов. – М.: Наука, 1987.
6. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М: Мир,1990. 584 с.
7. Марченко А.С., Минакова Л.А. Вероятностная модель временных рядов температуры воздуха // Метеорология и гидрология , 1980 № 96 с.39-47.
8. Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005, 259с.
9. Сёмочкин А.Г. Эффективный способ оценивания параметров смеси двух двухпараметрических распределений // Метеорология и гидрология , 1984 № 3 с.108-110.
10. Федорченко Е.И. О влиянии суточного хода параметров распределения на среднее число выбросов температуры воздуха // Труды ГГО, 1977, вып.397, стр. 21-26.
11. Derenok K.V., Ogorodnikov V.A. Numerical simulation of significant long-term decreases in air temperature //Russ. J. Numer. Math. Modelling. (2008) 23, № 3, pp. 223-237.