



Моделирование климата и его изменений

В.П. Дымников

Институт вычислительной математики РАН

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (Климатическая система и климат. Особенности климатической системы как физического объекта)
2. Система уравнений (Параметризация процессов подсеточных масштабов. Законы сохранения в адиабатическом приближении. « Асимптотические » законы сохранения. Требования к разностным аппроксимациям).
3. Математика климатического моделирования (Теоремы глобальной разрешимости. Существование аттрактора и оценки его размерности. Устойчивость аттрактора к постоянно действующим возмущениям. Устойчивость меры. Эпсилон –регуляризация и т.д.)

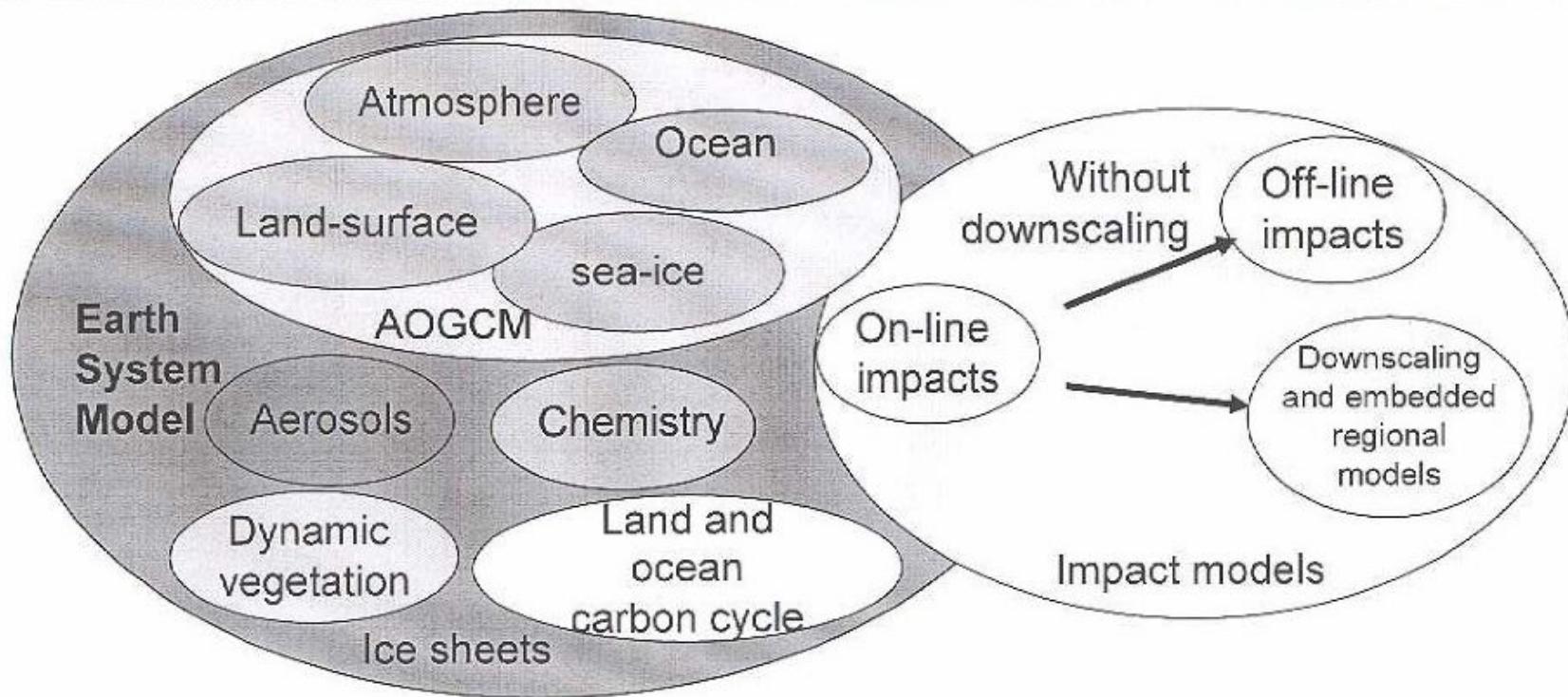
4. Модель ИВМ РАН (Численные эксперименты по воспроизведению современного климата. Проблема углекислого газа. Ансамбль моделей (IPCC-4))
5. Проблема чувствительности климата к малым внешним воздействиям (эпсилон-регуляризация и уравнение Фоккера-Планка. Флуктуационно-диссипационные соотношения. Обоснование (двумерная жидкость)).
6. Построение оператора отклика для моделей общей циркуляции атмосферы. Численные эксперименты. Обратные задачи (геоинжениринг)
7. Заключение (IPCC 4 ---- IPCC-5)

1. Климатическая система и климат

В начале этого раздела целесообразно определить два понятия.

- 1. Климатическая система есть система, объединяющая атмосферу, океан, криосферу, сушу и биоту.
- 2. Климат есть ансамбль состояний, который проходит климатическая система за достаточно большой промежуток времени.

FROM ESMs TO IMPACTS



Schematic of an AOGCM (oval at upper left) and Earth System model (in orange oval) and various types of impact models (right).

2. Особенности климатической системы как физического объекта

Климатическая система как физический объект обладает рядом специфических особенностей.

- 1. Главные компоненты системы - атмосфера и океан - с геометрических позиций можно рассматривать как тонкие пленки, поскольку отношение вертикального масштаба к горизонтальному составляет величину порядка 0.01 - 0.001. Таким образом, система квазидвумерна, однако, вертикальная стратификация по плотности очень важна и крупномасштабные вертикальные движения ответственны за бароклинные преобразования энергии. Характерные временные масштабы энергозначимых физических процессов лежат в диапазоне от 1 часа до десятков и сотен лет. Все это приводит к тому, что лабораторное моделирование такой системы, мягко говоря, крайне затруднительно.
- 2. С климатической системой нельзя поставить целенаправленный физический эксперимент. Действительно, нельзя «накачать» систему, например, углекислым газом и, сохраняя прочие равные условия, измерить полученный эффект.
- 3. В распоряжении исследователей имеются лишь короткие ряды данных наблюдений, да и то лишь об отдельных компонентах изучаемой системы.

Уравнения модели общей циркуляции атмосферы

$$\frac{du}{dt} - \left(f + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) = F_u ,$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(f + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) u + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) = F_v ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma} ,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \pi u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \pi v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \pi \alpha}{\partial \sigma} = 0 ,$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p \sigma \pi} \left[\pi \alpha + \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) \right] = F_T + \varepsilon ,$$

$$\frac{dq}{dt} = F_q - (C - E) ,$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \sigma} .$$

Параметризация
процессов
подсеточных
масштабов

Параметризация процессов подсеточных масштабов

- Турбулентность в пограничном слое атмосферы, верхнем слое океана и придонном пограничном слое
- Конвекция и гравитационные волны
- Неадиабатические источники тепла (радиация, фазовые переходы влаги, облачность, осадки и т.д.)
- Цикл углерода и фотохимические процессы
- Перенос тепла и влаги в почве, растительном и снежном покрове
- и т.д.

Законы сохранения

1. Сохранение массы

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \pi dS = 0$$

2. Баланс углового момента

$$M = a \cos \varphi (u + a \Omega \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_S \pi M dS d\sigma = \int_S \left(\Phi_S \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} a \cos \varphi \bar{\tau}_\lambda \Big|_{\sigma=1} \right) dS$$

Этот закон очень важен для объяснения возникновения
пассатов

3. Баланс полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \pi \left[\Phi_S + \int_0^1 (K + c_p T) d\sigma \right] dS = \int_0^1 \int_0^1 (u F_u + v F_v + F_T + \varepsilon) d\sigma dS.$$

Если

$$\Phi_S \equiv 0, \quad F_u = F_v = F_T = \varepsilon = 0,$$

то мы имеем закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_S \pi (K + c_p T) d\sigma dS = 0.$$

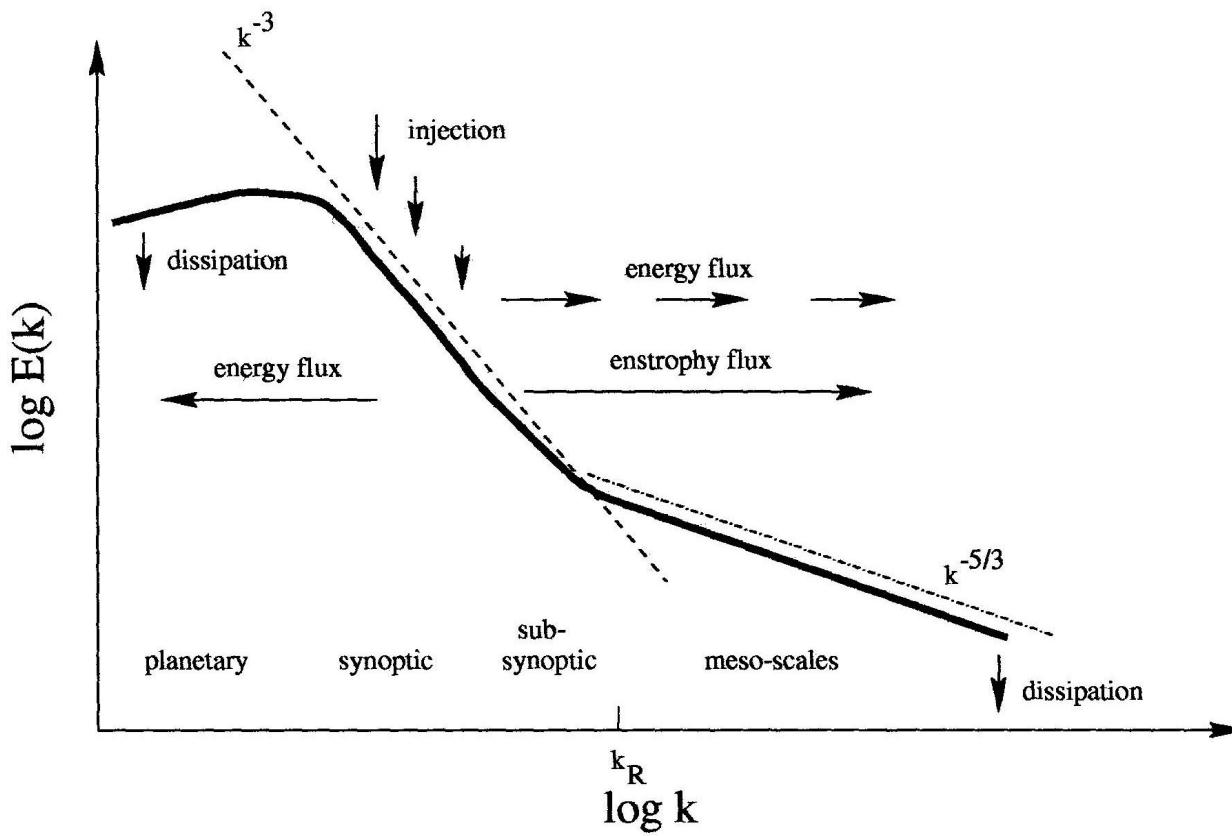


Fig. 2c

Figure 2: Schematic diagrams of energy spectrum, injection, dissipation and fluxes vs. wavenumber: (a) traditional 2D turbulence thinking, (b) Lilly's (1989) proposal, and (c) our proposal. See text for details.

Пусть

D – двумерный тор,

$$E = -\iint \psi \Delta \psi \, dD \text{ (энергия).}$$

$$\bar{\omega}^2 = \iint \omega^2 \, dD \text{ (энстрофия).}$$

Законы сохранения

$$E = \text{const}, \quad \bar{\omega}^2 = \text{const},$$

$$\bar{k}^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{E} = \text{const.}$$

МАТЕМАТИКА КЛИМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Теоремы глобальной разрешимости
2. Существование поглощающего множества, инерциального многообразия и аттрактора. Оценки размерности.
3. Траектории на аттракторе. Показатели Ляпунова . (задачи прогноза погоды и изменений климата)
4. Устойчивость аттрактора к малым внешним воздействиям. Устойчивость меры.
5. Аппроксимация аттракторов. Аппроксимация периодическими орбитами. Требования к разностным схемам.
6. Эпсилон-регуляризация. Теоремы сходимости и устойчивости для вероятностной меры. ФДТ и операторы отклика.
7. Процессы. ФДТ для периодической правой части.

Existence and uniqueness of a solution to primitive equations with stratification ‘in the large’

G. M. KOBELKOV* and V. B. ZALESNY*

Abstract — Existence and uniqueness of a weak solution for the system of primitive equations with stratification describing large-scale ocean dynamics, is proved ‘in the large’. The system is obtained from the original 3D primitive equations with viscosities depending on ρ_z . The character of these dependences providing the existence and uniqueness of a solution ‘in the large’ is determined. More precisely, we consider that the viscosity coefficients in the vertical direction satisfy the following properties: they are non-increasing for $\rho_z \leq 0$ and constant for $\rho_z > 0$ and satisfy the property: $0 \leq \mu'_v(r)r \leq M$. Then it is proved that for an arbitrary time interval $[0, T]$, any viscosity coefficients in the horizontal direction, and any initial conditions $\hat{\mathbf{u}}_0 = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega)$, $\int_0^1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) dz = 0$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, a weak solution exists and is unique and $\hat{\mathbf{u}}_z \in \mathbf{W}_2^1(Q_T)$, $\rho_z \in W_2^1(Q_T)$ and the norms $\|\nabla \hat{\mathbf{u}}\|_\Omega$, $\|\tilde{\nabla} \rho\|_\Omega$ are continuous in t .

1. Formulation of the problem

Let Ω be a cylinder in R^3 of the form

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Omega', x_3 \in [0, 1]\}$$

where Ω' is a 2D bounded domain with a boundary consisting of a finite number of smooth arcs intersecting at nonzero angles. Let us represent the boundary $\partial\Omega$ as $\partial\Omega = S_1 \cup S$, $S = \partial\Omega' \times [0, 1]$. Then S_1 is the bottom and upper surface of the cylinder and S is its lateral surface. By Q_t , as usual, we denote the domain $Q_t = \Omega \times [0, t]$; so $Q_T = \Omega \times [0, T]$.

Further, let $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ be a velocity vector; by $\hat{\mathbf{u}}$ we denote the vector-function $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$. In what follows one assumes that the indices i and j take the values 1, 2 while the index k ranges from 1 to 3. The independent variables are denoted by $x = (x_1, x_2, x_3)$ as well as by x, y, z . Assume $x' = (x_1, x_2)$. The following notation is used:

$$\partial_k v = \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad v_x = \nabla v, \quad v_{x'} = \nabla' v = (\partial_1 v, \partial_2 v), \quad \operatorname{div}' \hat{\mathbf{u}} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$$

$$\Delta' v = \partial_1^2 v + \partial_2^2 v, \quad \|v\|_q = \|v\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|v\| = \|v\|_{L_2}, \quad |v|_q = \left(\int_{\Omega'} |v|^q dx' \right)^{1/q}.$$

As usual, c with and without indices denotes the constants in inequalities not depending on functions entering these inequalities, but depending on the domain form, the time interval T , and the norms of the initial conditions. Moreover, various constants may be denoted by one and the same letter if this does not provoke misunderstanding.

A system of primitive equations with stratification describing the large-scale ocean dynamics in the Cartesian coordinates is of the form [11, 12]

$$\hat{\mathbf{u}}_t - \nu \Delta' \hat{\mathbf{u}} - \nu_v \partial_3^2 \hat{\mathbf{u}} + l \hat{\mathbf{u}} + \nabla' p + u_k \hat{\mathbf{u}}_{x_k} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -g\rho \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho_t - \mu \Delta' \rho - \partial_3 \left(\mu_v(\rho_z) \partial_3 \rho \right) + u_k \rho_{x_k} = 0 \quad (1.4)$$

where ν , ν_v and μ are positive constants and μ_v depends on ρ_z as was discussed above. System (1.1)–(1.4) is completed by the following boundary and initial conditions

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial n} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } S, \quad u_3 = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial n} = \mathbf{0} \quad \text{on } S_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (1.6)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(x, 0) = \hat{\mathbf{u}}_0(x), \quad \int_0^1 \operatorname{div}' \hat{\mathbf{u}}_0 dz = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad (1.7)$$

hereafter, summation is assumed over repeating indices in products; g is the modified gravity: $g = g^{\text{real}} H / \rho_0$, $p = p^{\text{real}} / \rho_0$, $\rho_0 = \text{const}$, u_3 is a reduced vertical velocity: $u_3 = u_3^{\text{real}} / H$, where $H = \text{const}$ is the ocean depth, \mathbf{n} is the outer unit normal to S , $\partial / \partial n$ is the normal derivative, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. The operator $l\hat{\mathbf{u}}$ is of the form

$$l\hat{\mathbf{u}} = \omega(u_2, -u_1), \quad \omega = \text{const}$$

and is skew-symmetric, i.e. $(l\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = 0$.

The right-hand sides of (1.1) and (1.6) are assumed to be equal to zero for simplicity. Nevertheless, from the further considerations it follows that the results obtained hold also for sufficiently smooth nonzero right-hand sides. Here for simplicity we consider equations in the Cartesian coordinate system, but all results may be directly extended to the case of the spherical coordinate system.

5.3. Existence of a solution

Using the same reasonings as in [15] and [3], it is possible to prove the existence of a local (in the interval $[0, t_*]$) strong solution. It is easy to see that $t_* = T$. Indeed, suppose the contrary. This means that a solution blows up ($\|\hat{\mathbf{u}}_x(t)\| \rightarrow \infty$ at $t \rightarrow t_1 < T$). But because of *a priori* estimate (4.10), it is impossible.

Thus, we have proved the following theorem.

Theorem 5.1. *Let $\hat{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\hat{\mathbf{u}}_0$, ρ_0 satisfy boundary conditions (1.5)–(1.7) and $\int_0^1 \operatorname{div}' \hat{\mathbf{u}}_0 dz = 0$. Then for any $\nu, \nu_\nu > 0$ and arbitrary $T > 0$, for any $\mu, \mu_\nu > 0$, where $m\nu_\nu$ satisfies the conditions discussed before, in Q_T the problem (1.1)–(1.5) has a unique weak solution $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$, $\rho \in R$ such that $\hat{\mathbf{u}}^2, \hat{\mathbf{u}}_z^2, \hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_{zx}, \hat{\mathbf{u}}_t, \hat{\mathbf{u}}_{tx} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$ and the norm $\|\hat{\mathbf{u}}_x\|$ is continuous in t .*

Новая версия модели климата ИВМ РАН

В атмосфере разрешение составляет 2.5×2 градуса по долготе и широте и 21 уровень по вертикали до 10 гПа (30 км). Модель включает решение уравнений гидротермодинамики конечно-разностным методом, параметризации радиации, пограничного слоя, конвекции и конденсации, гравитационно-волнового сопротивления, процессов в почве, растениях и на поверхности суши.

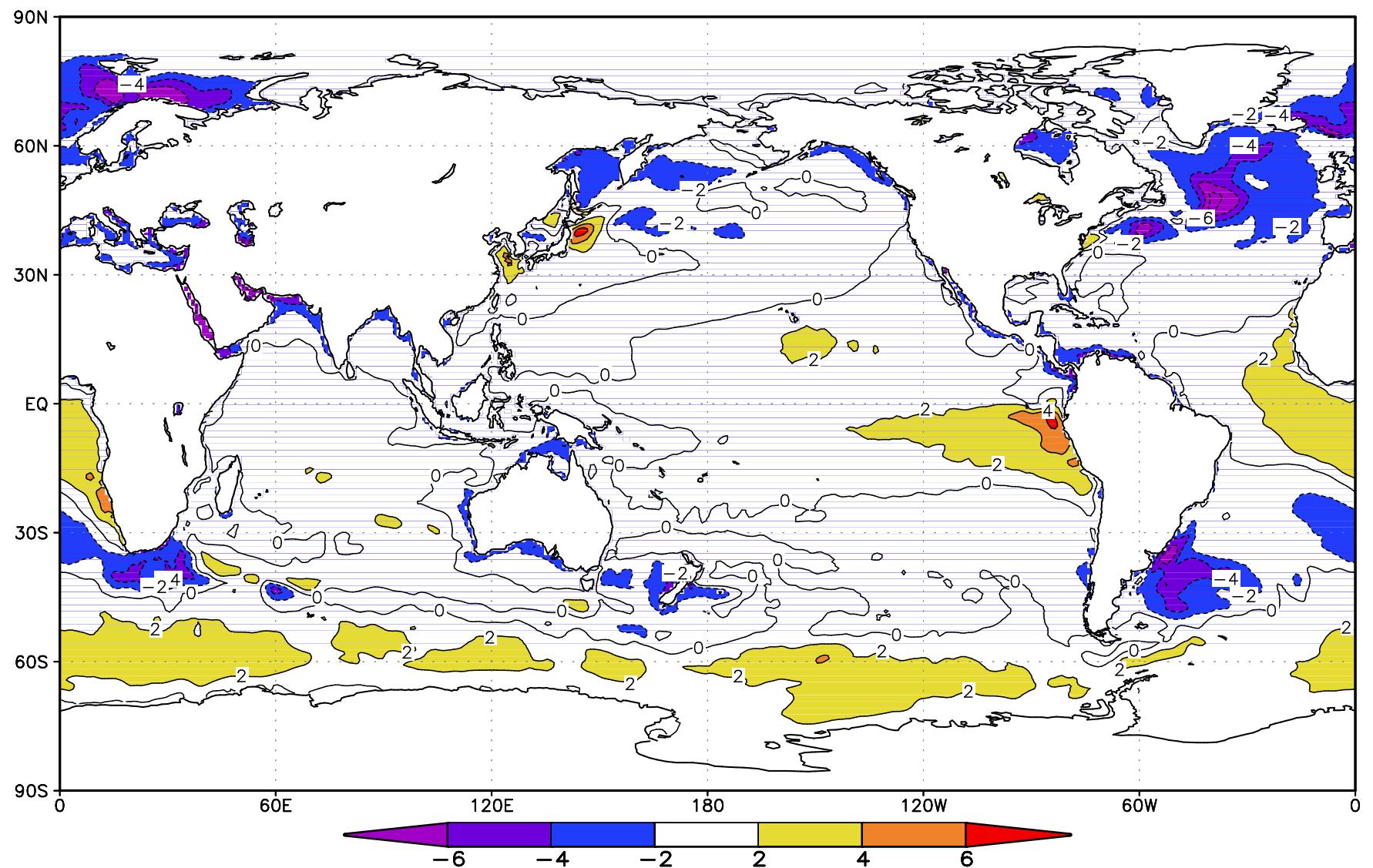
В океане разрешение составляет 1×0.5 градуса по долготе и широте и 40 уровней по вертикали. Модель океана включает решение уравнений конечно-разностным методом, параметризации верхнего перемешанного слоя, динамики и термодинамики льда.

Модели атмосферы и океана обмениваются данными без коррекции потоков.

Модель климата включает также расчет цикла углерода растений, почвы, атмосферы и океана, и расчет цикла метана.

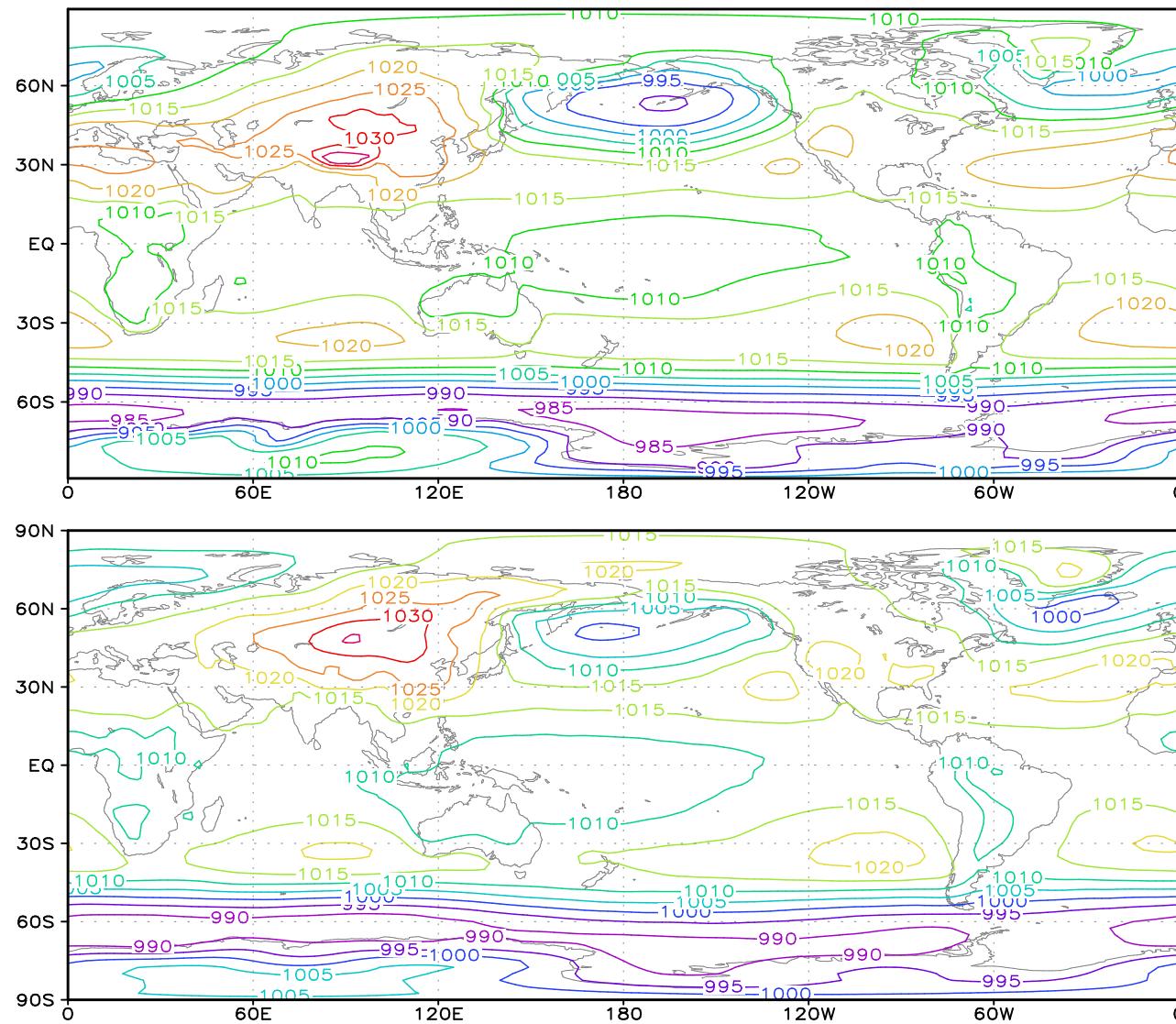
Модель реализована на суперкомпьютере ИВМ РАН Intel Xeon. На 56 процессорах счет модели на 8.5 лет модельного времени занимает сутки реального времени.

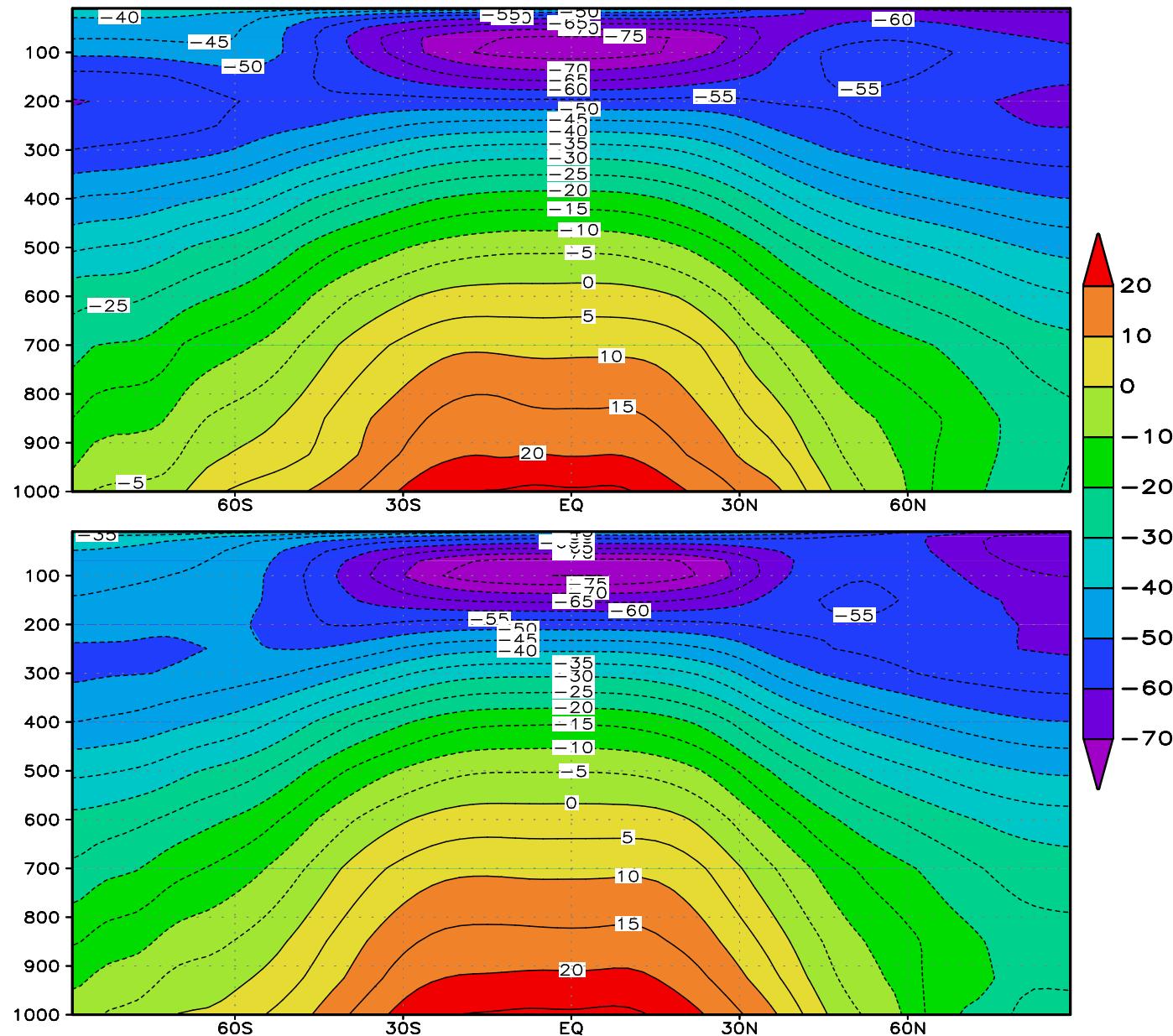
С моделью проведен расчет по воспроизведению современного климата продолжительностью 100 лет.



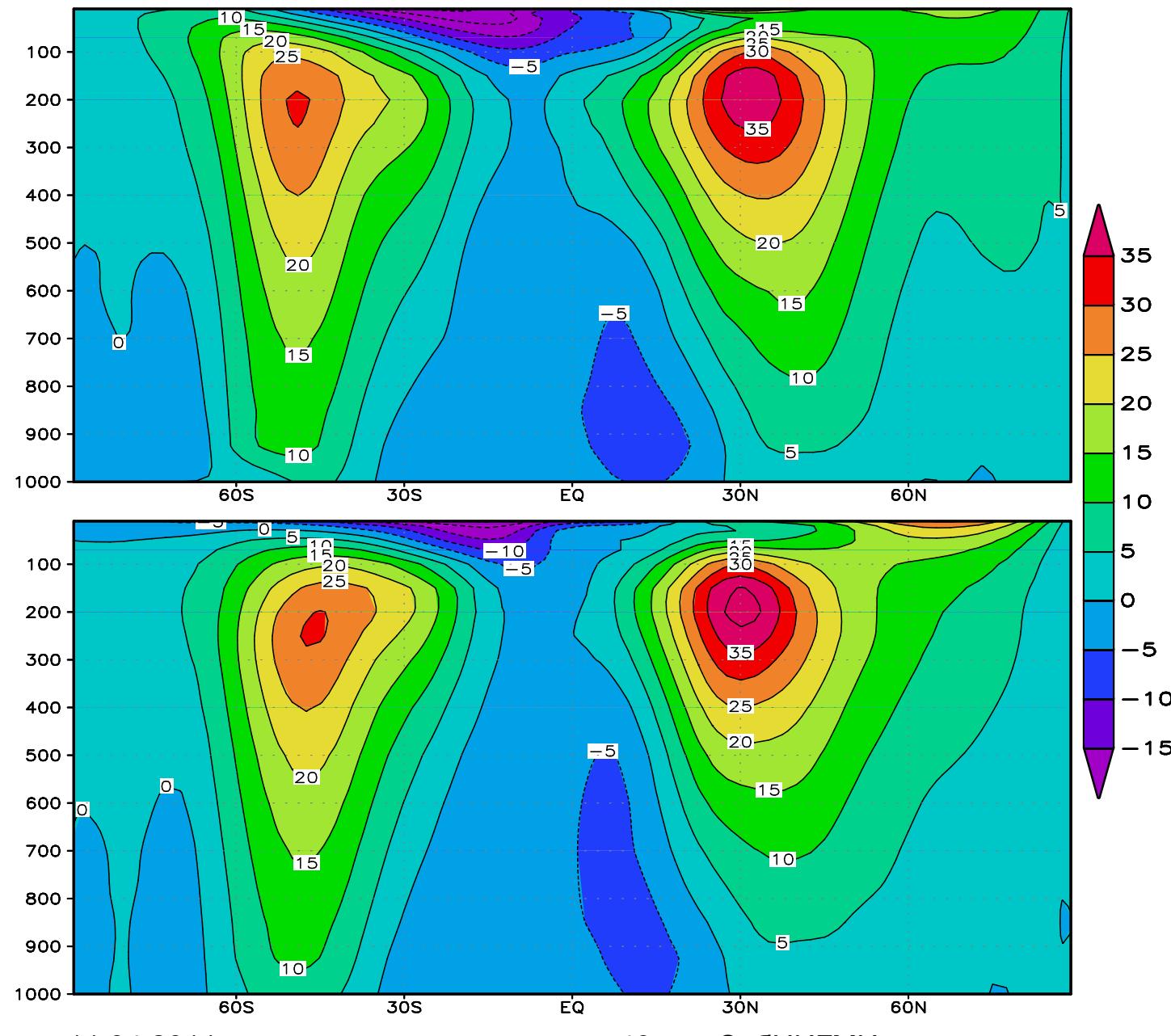
Среднегодовая ошибка ТПО в модели

Давление на уровне моря в декабре-феврале по данным модели (вверху) и наблюдений (внизу)

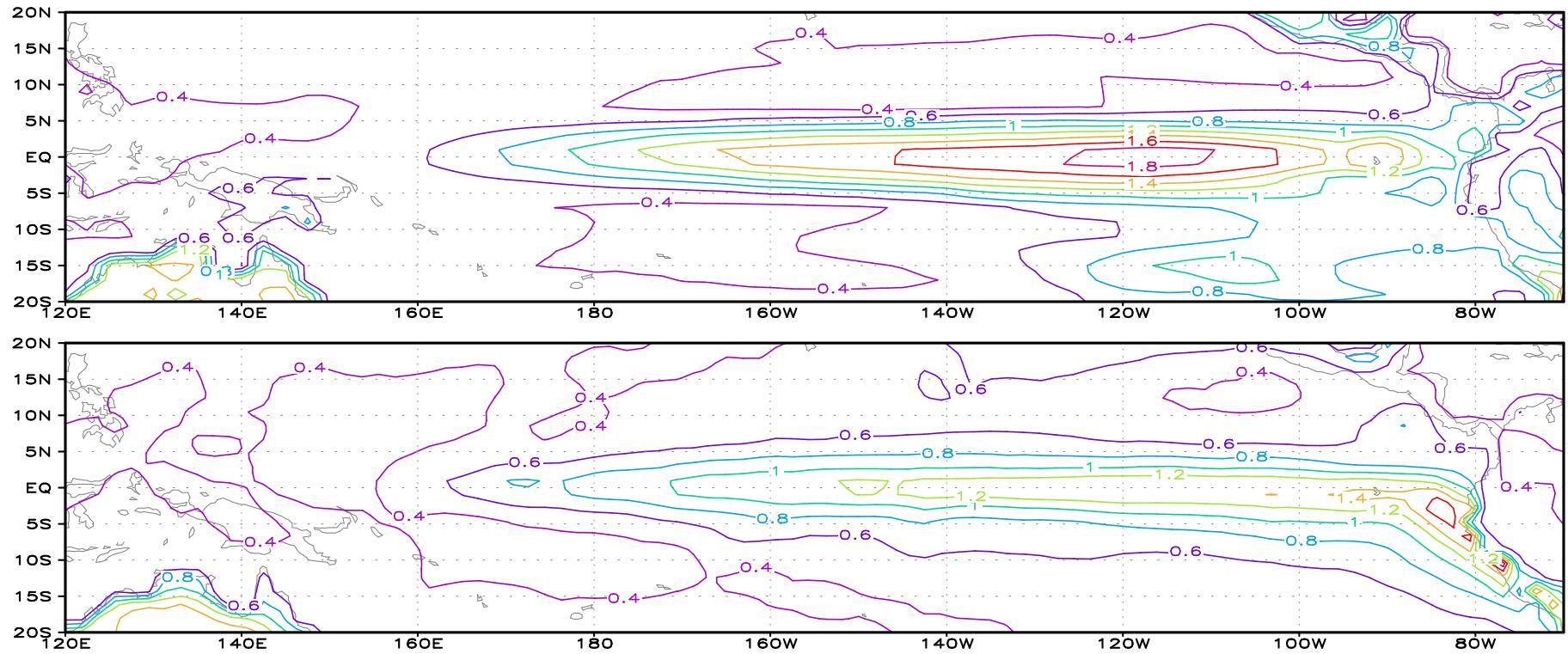




Температура
в декабре-
феврале по
данным
модели
(вверху) и
наблюдений
(внизу)



U-компоненты
скорости
ветра в
декабре-
феврале по
данным
модели
(вверху) и
наблюдений
(внизу)



Среднеквадратичное отклонение ТПО в районе Эль-Ниньо по данным модели
(вверху) и наблюдений (внизу)

TABLE I. Climate variables and corresponding validation data. Variables listed as “zonal mean” are latitude–height distributions of zonal averages on twelve atmospheric pressure levels between 1000 and 100 hPa. Those listed as “ocean,” “land,” or “global” are single-level fields over the respective regions. The variable “net surface heat flux” represents the sum of six quantities: incoming and outgoing shortwave radiation, incoming and outgoing longwave radiation, and latent and sensible heat fluxes. Period indicates years used to calculate observational climatologies.

Variable	Domain	Validation data	Period
Sea level pressure	ocean	ICOADS (Woodruff et al. 1987)	1979–99
Air temperature	zonal mean	ERA-40 (Simmons and Gibson 2000)	1979–99
Zonal wind stress	ocean	ICOADS (Woodruff et al. 1987)	1979–99
Meridional wind stress	ocean	ICOADS (Woodruff et al. 1987)	1979–99
2-m air temperature	global	CRU (Jones et al. 1999)	1979–99
Zonal wind	zonal mean	ERA-40 (Simmons and Gibson 2000)	1979–99
Meridional wind	zonal mean	ERA-40 (Simmons and Gibson 2000)	1979–99
Net surface heat flux	ocean	ISCCP (Zhang et al. 2004), OAFLUX (Yu et al. 2004)	1984 (1981)–99
Precipitation	global	CMAP (Xie and Arkin 1998)	1979–99
Specific humidity	zonal mean	ERA-40 (Simmons and Gibson 2000)	1979–99
Snow fraction	land	NSIDC (Armstrong et al. 2005)	1979–99
Sea surface temperature	ocean	GISST (Parker et al. 1995)	1979–99
Sea ice fraction	ocean	GISST (Parker et al. 1995)	1979–99
Sea surface salinity	ocean	NODC (Levitus et al. 1998)	variable

on a grid-point basis with the observed interannual variance, and averaging globally. In mathematical terms this can be written as

$$e_{vn}^2 = \sum_n (w_n (\bar{s}_{vmn} - \bar{o}_{vn})^2 / \sigma_{vn}^2), \quad (1)$$

where \bar{s}_{vmn} is the simulated climatology for climate variable (v), model (m), and grid point (n); \bar{o}_{vn} is the corresponding observed climatology; w_n are proper weights needed for area and mass averaging; and σ_{vn}^2 is the interannual variance from the validating observations. The normalization with the interannual variance helped to homogenize errors from different regions and variables. In order to ensure that different climate variables received similar weights when combining their errors, we next scaled e^2 by the average error found in a reference ensemble of models—that is,

$$\bar{I}_{vm}^2 = e_{vn}^2 / \overline{e_{vn}^2}_{m=20C3M}, \quad (2)$$

where the overbar indicates averaging. The reference ensemble was the present-day CMIP-3 experiment.

The final model performance index was formed by taking the mean over all climate variables (Table 1) and one model using equal weights,

$$\bar{I}_m^2 = \overline{\bar{I}_{vm}^2}_v. \quad (3)$$

The final step combines the errors from different climate variables into one index. We justify this step by normalizing the individual error components prior to taking averages [Eqs. (1) and (2)]. This guarantees that each component varies evenly around one and has roughly the same variance. In this sense, the individual \bar{I}_{vm}^2 values can be understood as rankings with respect to individual climate variables, and the final index is the mean over all ranks. Note that a very similar approach has been taken by Murphy et al. (2004).

RESULTS. The outcome of the comparison of the 57 models in terms of the performance index I^2 is illustrated in the top three rows of Fig. 1. The I^2 index varies around one, with values greater than one for underperforming models and values less than one

BAMS

How Well Do Coupled Models Simulate Today's Climate?

THOMAS REICHLER
JUNSU KIM

March 2008

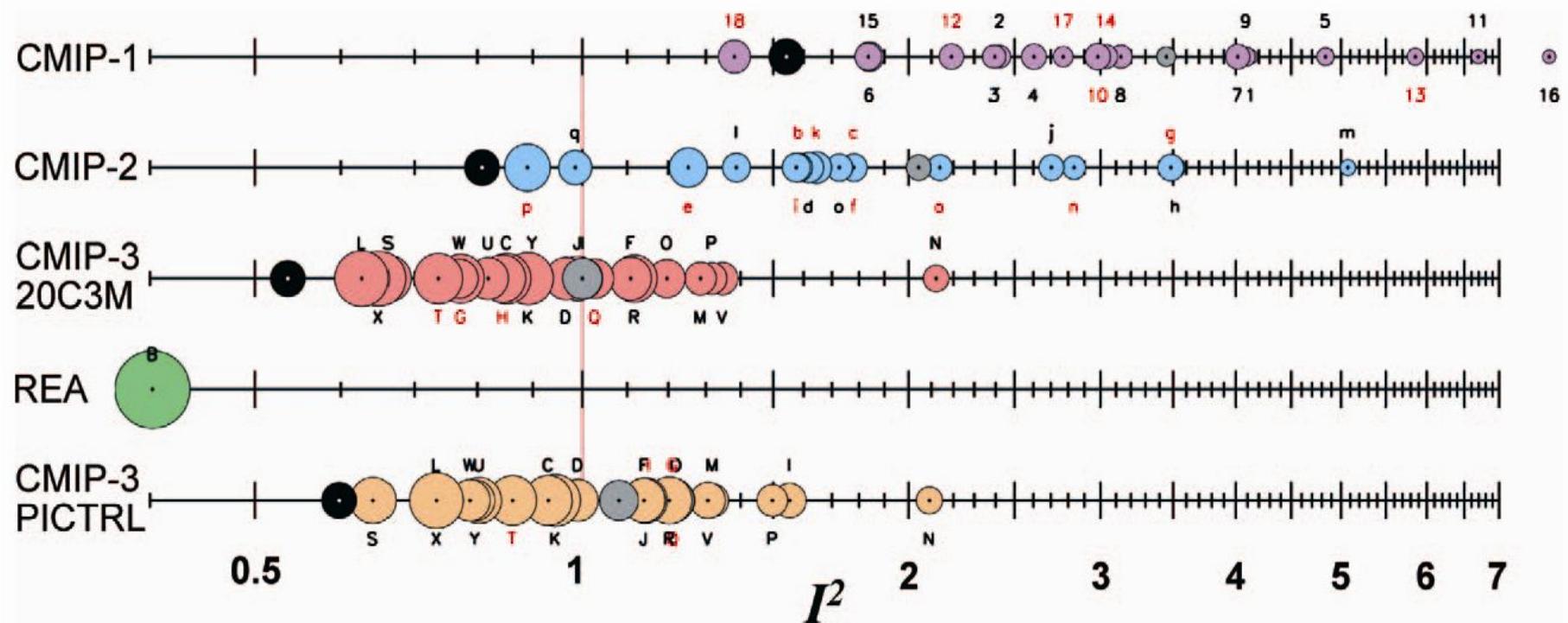


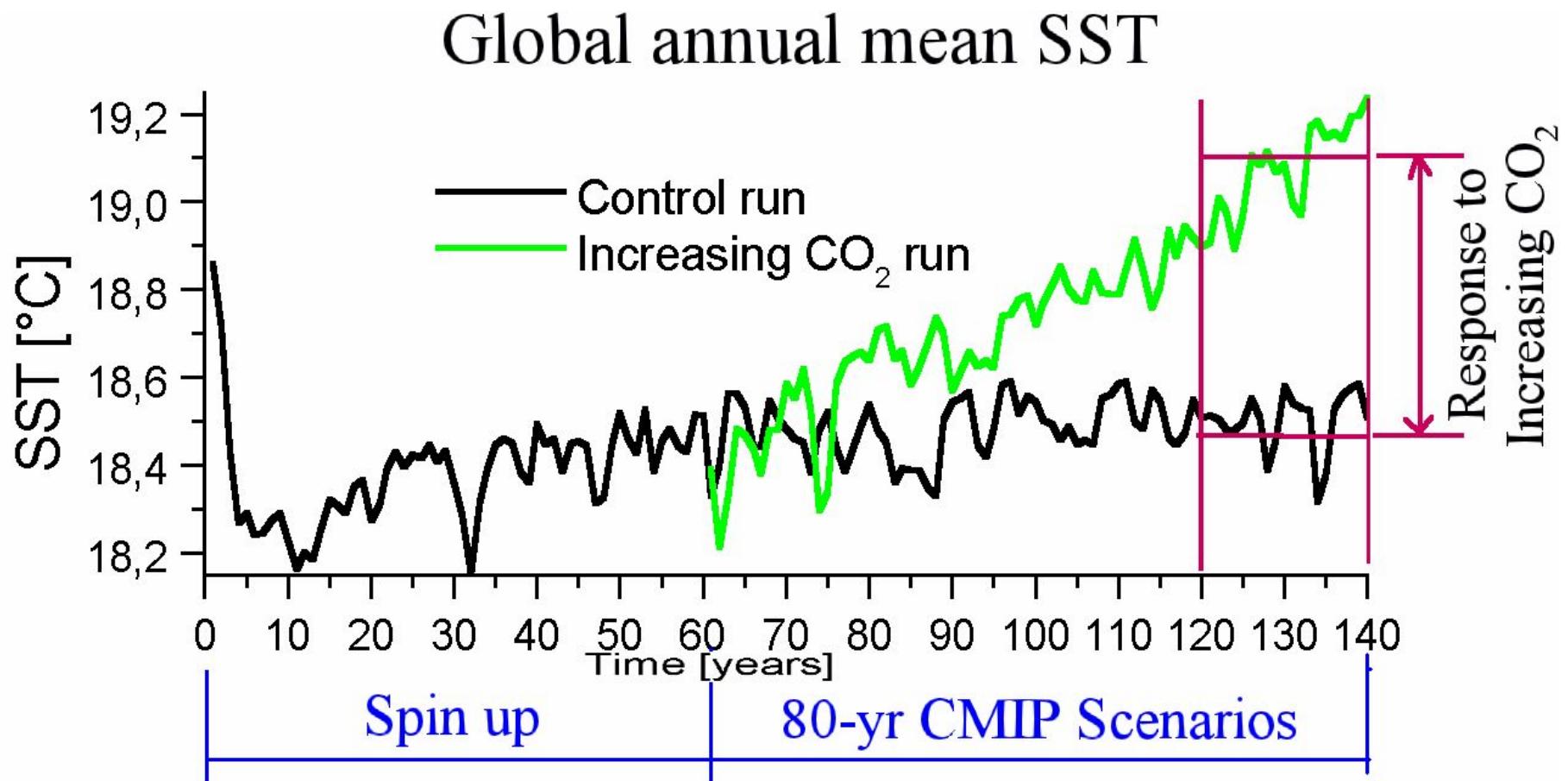
FIG. 1. Performance index I^2 for individual models (circles) and model generations (rows). Best performing models have low I^2 values and are located toward the left. Circle sizes indicate the length of the 95% confidence intervals. Letters and numbers identify individual models (see supplemental online material at doi:10.1175/BAMS-89-3-Reichler); flux-corrected models are labeled in red. Grey circles show the average I^2 of all models within one model group. Black circles indicate the I^2 of the multimodel mean taken over one model group. The green circle (REA) corresponds to the I^2 of the NCEP/NCAR reanalyses. Last row (PICTRL) shows I^2 for the preindustrial control experiment of the CMIP-3 project.

Чувствительность моделей климата к увеличению CO₂

СМИР - Coupled Model Intercomparison Project

<http://www-pcmdi.llnl.gov/cmip>

В рамках СМИР накапливаются результаты расчетов с глобальными совместными моделями общей циркуляции атмосферы и океана (свыше 30 моделей). Такого рода модели используются для обнаружения антропогенных эффектов в климатических данных прошедшего столетия и для оценки будущих климатических изменений, обусловленных антропогенным производством парниковых газов и аэрозолей.



Оператор отклика для первого момента (нелинейная теория)

Нелинейная модель:

$$\frac{du}{dt} + B(u) = \eta(t)$$

($\eta(t)$ - белый шум по времени)

«Возмущенная» модель:

$$\frac{du'}{dt} + B(u') = \eta(t) + \delta f$$

Стационарный отклик

$$\delta \langle u \rangle = \langle u' \rangle - \langle u \rangle$$

$$\delta \langle u \rangle = M \delta f$$

Уравнение Фоккера-Планка для плотности инвариантной меры ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(B(u)\rho) = \varepsilon \Delta \rho$$

имеет единственное стационарное решение ρ^* .

В первом приближении по δf

$$\langle \delta u \rangle_i = \sum_j \int_0^t \left\langle u_i(t) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial u_j}(t') \right\rangle dt' \delta f_j$$

В случае нормального распределения

$$M = \int_0^\infty C(\tau) C^{-1}(0) d\tau$$

Dedicated to Leonid Romanovich Volevich on the occasion of his seventieth birthday

Ergodicity for a Class of Markov Processes and Applications to Randomly Forced PDE's. I

A. Shirikyan

*Laboratoire de Mathématiques, Université de Paris-Sud XI,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail: Armen.Shirikyan@math.u-psud.fr*

Received September 22, 2004

Abstract. The paper is devoted to studying the problem of ergodicity for dissipative PDE's perturbed by an external random force. We give a simple sufficient condition for uniqueness and stability of a stationary measure for a family of Markov processes. The result is applied to the 2D Navier–Stokes system.



2. MIXING FOR THE TWO-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES SYSTEM

2.1. *Initial-Boundary Value Problem*

Let $D \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with smooth boundary ∂D . Denote by \mathbf{n} the unit outward pointing normal to ∂D . For any $s \in \mathbb{R}$, let $H^s(D, \mathbb{R}^2)$ be the space of vector functions (u_1, u_2) on D whose components belong to the Sobolev space of order s . If $s = 0$, we write $L^2(D, \mathbb{R}^2)$.

Let us consider the 2D Navier–Stokes system in D . After projecting to the space of divergence-free square-integrable vector fields on D whose normal components vanish on ∂D , we obtain the following evolution equation:

$$\dot{u} + \nu Lu + B(u, u) = h + \eta(t). \quad (2.1)$$

Here $\nu > 0$ stands for the viscosity, $L = -\Pi\Delta$, and $B(u, v) = \Pi(u, \nabla)v$, where Π denotes the orthogonal projection from $L^2(D, \mathbb{R}^2)$ to the subspace

$$H = \left\{ u \in L^2(D, \mathbb{R}^2) : \operatorname{div} u = 0 \text{ in } D, (u, \mathbf{n})|_{\partial D} = 0 \right\}.$$

Concerning the right-hand side of (2.1), we assume that $h \in H$ and η is a random process of the form

$$\eta(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x), \quad \zeta(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \beta_j(t) e_j(x), \quad (2.2)$$

where $\{e_j\}$ is a complete set of normalized eigenfunctions of the operator L supplemented by the Dirichlet boundary condition, $\{\beta_j\}$ is a sequence of independent standard Brownian motions defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, and $b_j \geq 0$ are some constants such that

$$B_0 := \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 < \infty. \quad (2.3)$$

Roughly speaking, this means that the function $\zeta(t)$ belongs to H for almost all values of the random parameter.

Let us consider the Cauchy problem for (2.1), (2.2):

$$u(0) = u_0, \quad (2.4)$$

where $u_0 = u_0(x)$ is an H -valued random variable on Ω independent of $\{\beta_j\}$. We first recall the concept of solution for (2.1), (2.4).

For a closed interval $I \subset \mathbb{R}$ and a Banach space X , we denote by $C(I, X)$ the space of continuous functions $f: I \rightarrow X$ and by $L^2_{\text{loc}}(I, X)$ the space of Bochner-measurable functions $f: I \rightarrow X$ such that $\int_J \|f(t)\|_X^2 dt < \infty$ for any compact interval $J \subset I$.

Theorem 2.3. *Suppose that $h \in H$, condition (2.3) is satisfied, and*

$$b_j \neq 0 \quad \text{for all } j \geq 1. \quad (2.5)$$

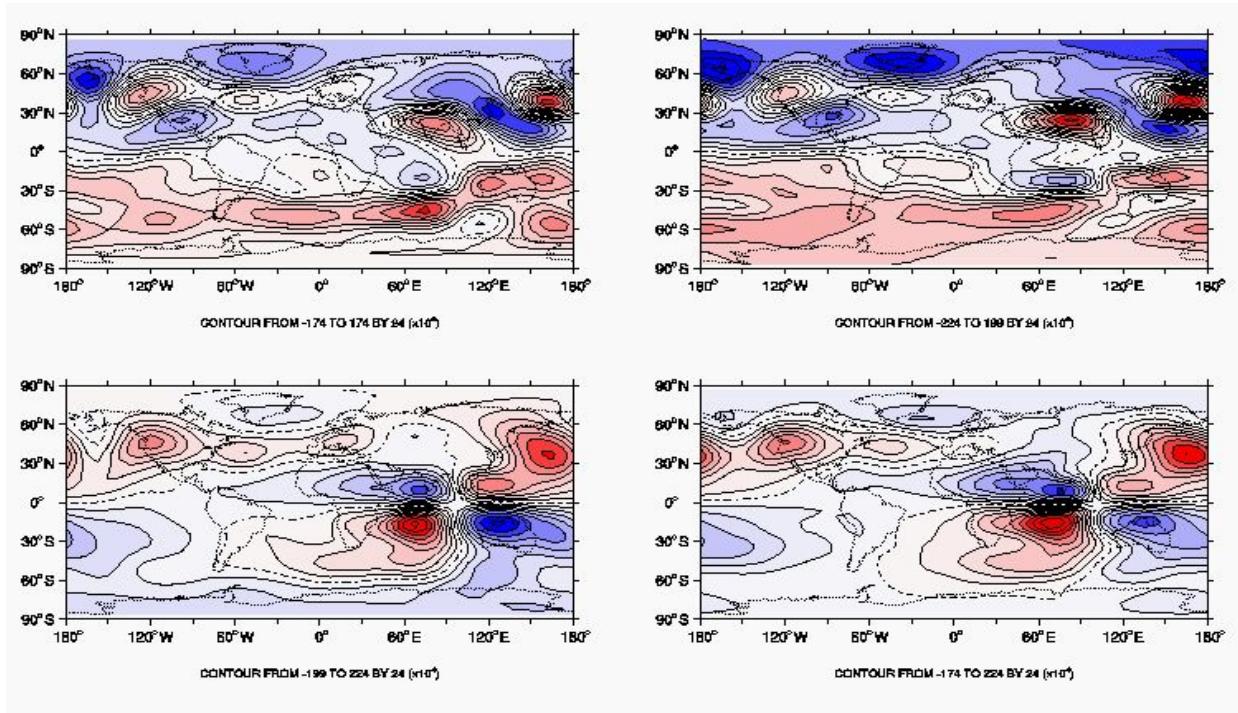
Then, for any $\nu > 0$, the family (u_t, \mathbb{P}_u) associated with problem (2.1), (2.2) has a unique stationary measure $\mu \in \mathcal{P}(H)$. Moreover, the measure μ is mixing in the following sense: the convergence relation (1.4) holds for any initial measure $\lambda \in \mathcal{P}(H)$.

Dimension reduction for INM RAS AGCM (5x4x21)

- 1) Use only T, u, v from 17 interpolated pressure levels and Ps.
- 2) Calculate EOF for each data field. Project T and Ps onto 200 leading EOFs, project u and v onto 50 leading EOFs. Dimension of each field goes from 3240 to 200 (50). Operator dimension goes to 5200 (from 400000).
- 3) Calculate 3D EOFS of the 5200- component vector. Project data onto 2000 leading 3D EOFs..
- 4) Calculate covariances in the space of 2000 leading 3D EOFs.

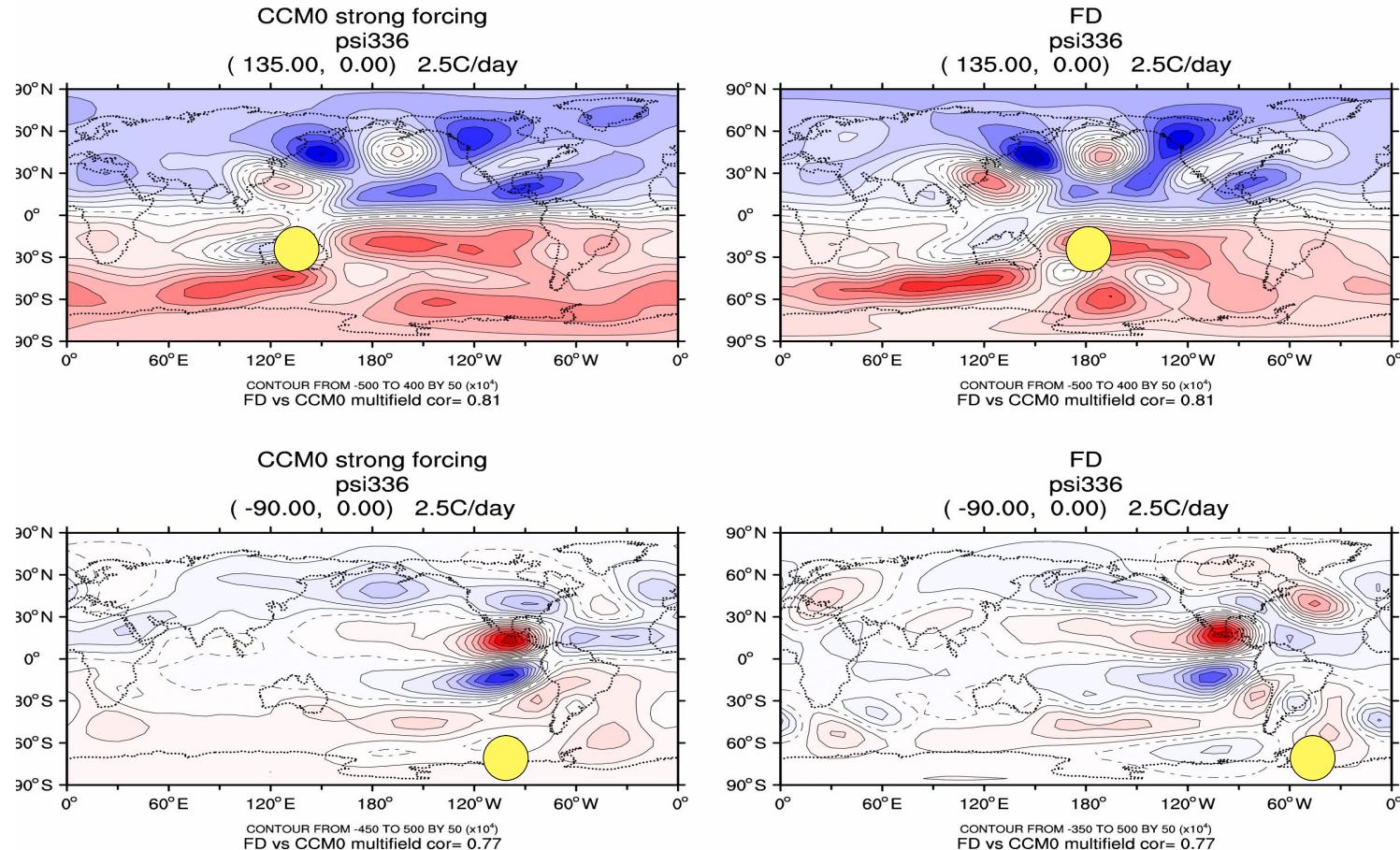
$$x(t) = \begin{pmatrix} T_{010}(t) \\ T_{020}(t) \\ \dots \\ T_{925}(t) \\ T_{1000}(t) \\ U_{010}(t) \\ U_{020}(t) \\ \dots \\ U_{925}(t) \\ U_{1000}(t) \\ V_{010}(t) \\ V_{020}(t) \\ \dots \\ V_{925}(t) \\ V_{1000}(t) \\ Ps(t) \end{pmatrix} \rightarrow P^{(1)}x(t) = \begin{pmatrix} P_{T010}T_{010}(t) \\ P_{T020}T_{020}(t) \\ \dots \\ P_{T925}T_{925}(t) \\ P_{T1000}T_{1000}(t) \\ P_{U010}U_{010}(t) \\ P_{U020}U_{020}(t) \\ \dots \\ P_{U925}U_{925}(t) \\ P_{U1000}U_{1000}(t) \\ P_{V010}V_{010}(t) \\ P_{V020}V_{020}(t) \\ \dots \\ P_{V925}V_{925}(t) \\ P_{V1000}V_{1000}(t) \\ P_{Ps1000}Ps(t) \end{pmatrix} \rightarrow P^{(2)}P^{(1)}x(t)$$

Восстановление отклика ССМ0 на синусоидальную аномалию нагревания



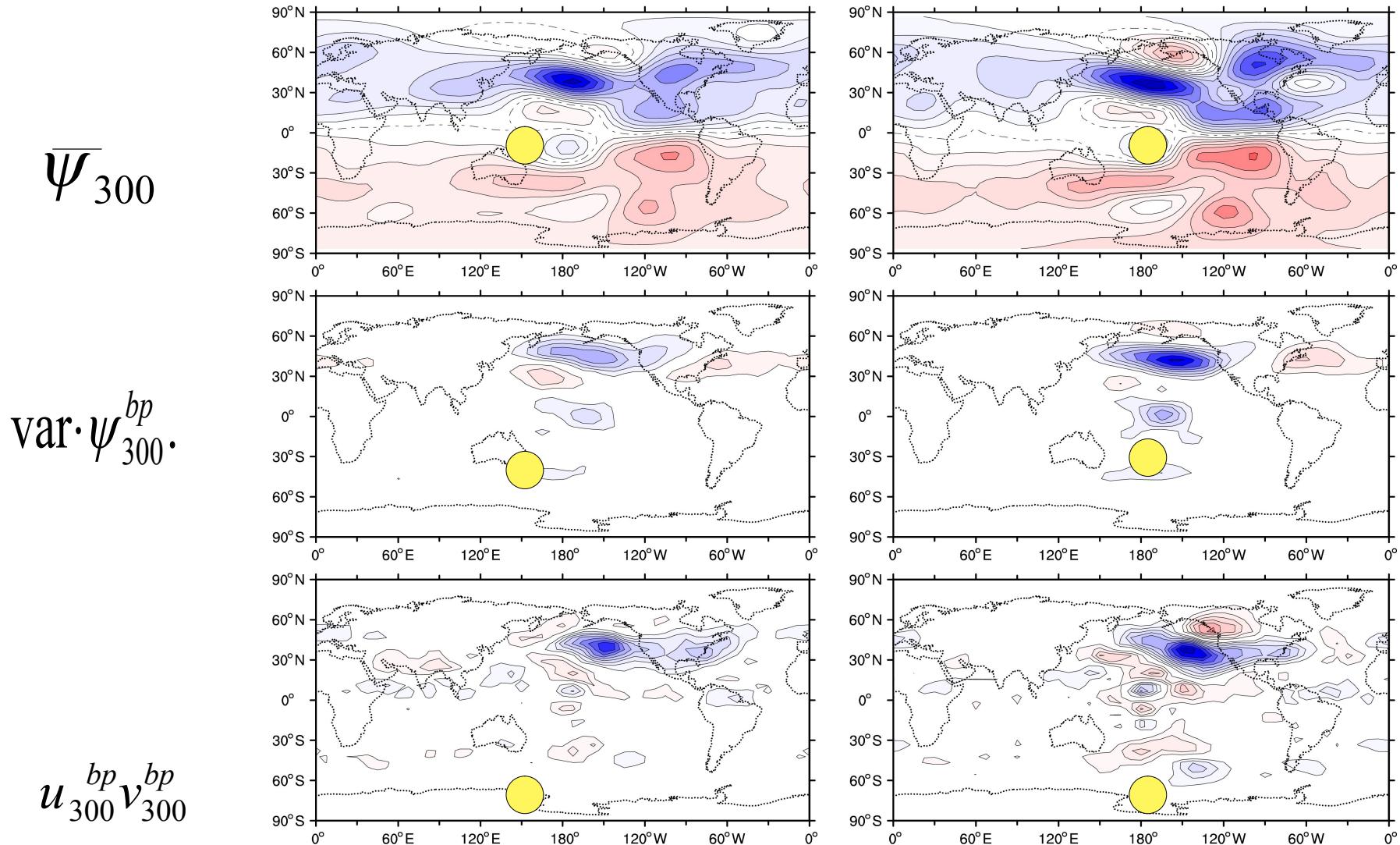
Отклик, рассчитанный с помощью ССМ0 (справа) и восстановленный с использованием М-оператора (слева). Аномалия нагревания задана на (60°E, 00N). Верхний рисунок – $\Psi_{0.336}$, нижний – $\Psi_{0.811}$

How it works for CCM0?



CCM0 (left) and FDT operator (right) responses to 2 equator heating anomalies (Psi336).

How it works for CCM0?



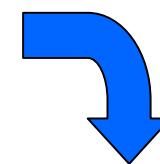
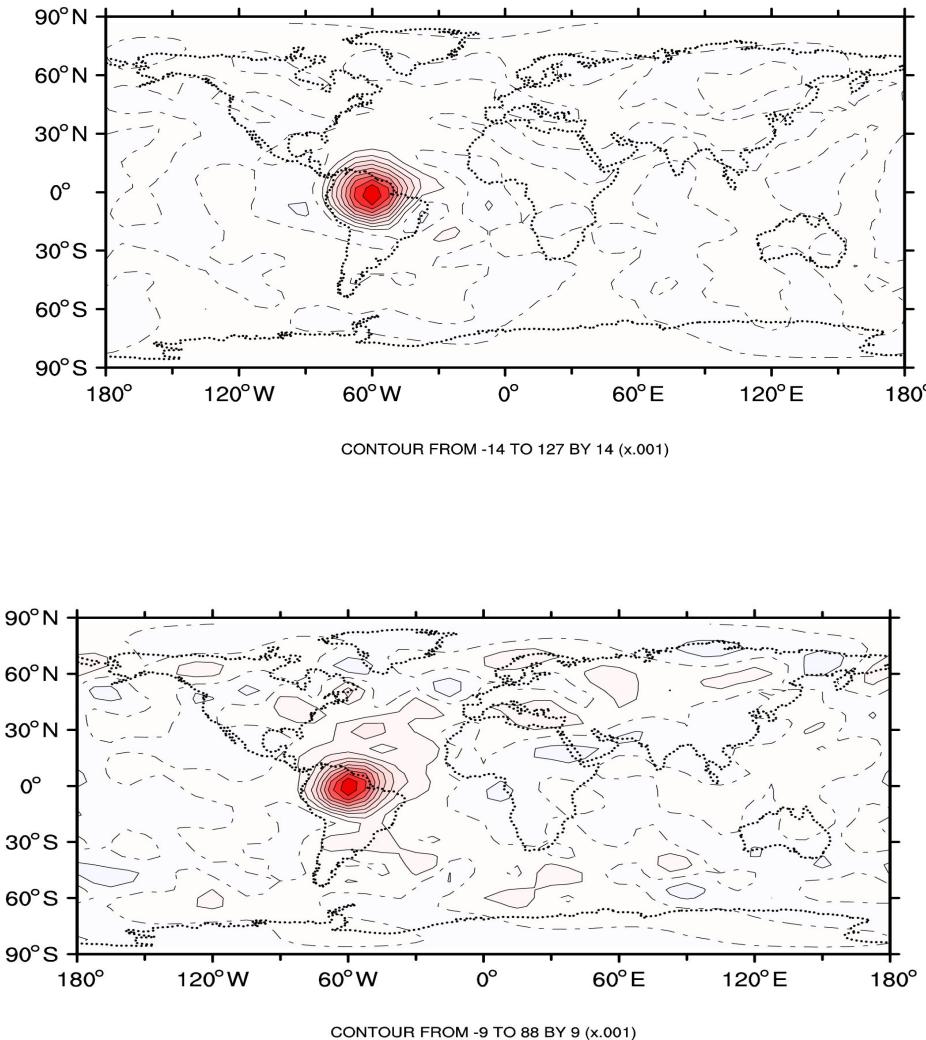
Response of the streamfunction, high frequency variance and meridional momentum flux onto the heating at (165W,0N), AGCM vs FDT, sigma=336.

$$\delta \langle W \rangle = M \delta f.$$

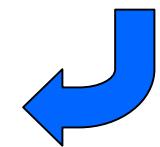
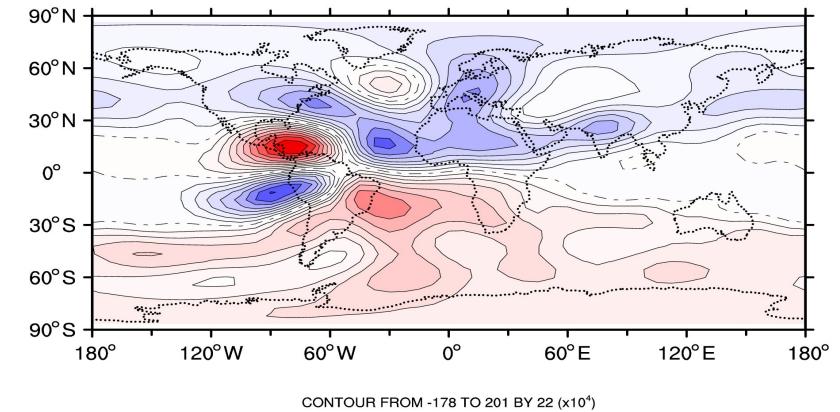
If we know M we can find the forcing producing given response in the system statistics

$$\delta f = M^{-1} \delta \langle W \rangle.$$

How it works for CCM0?



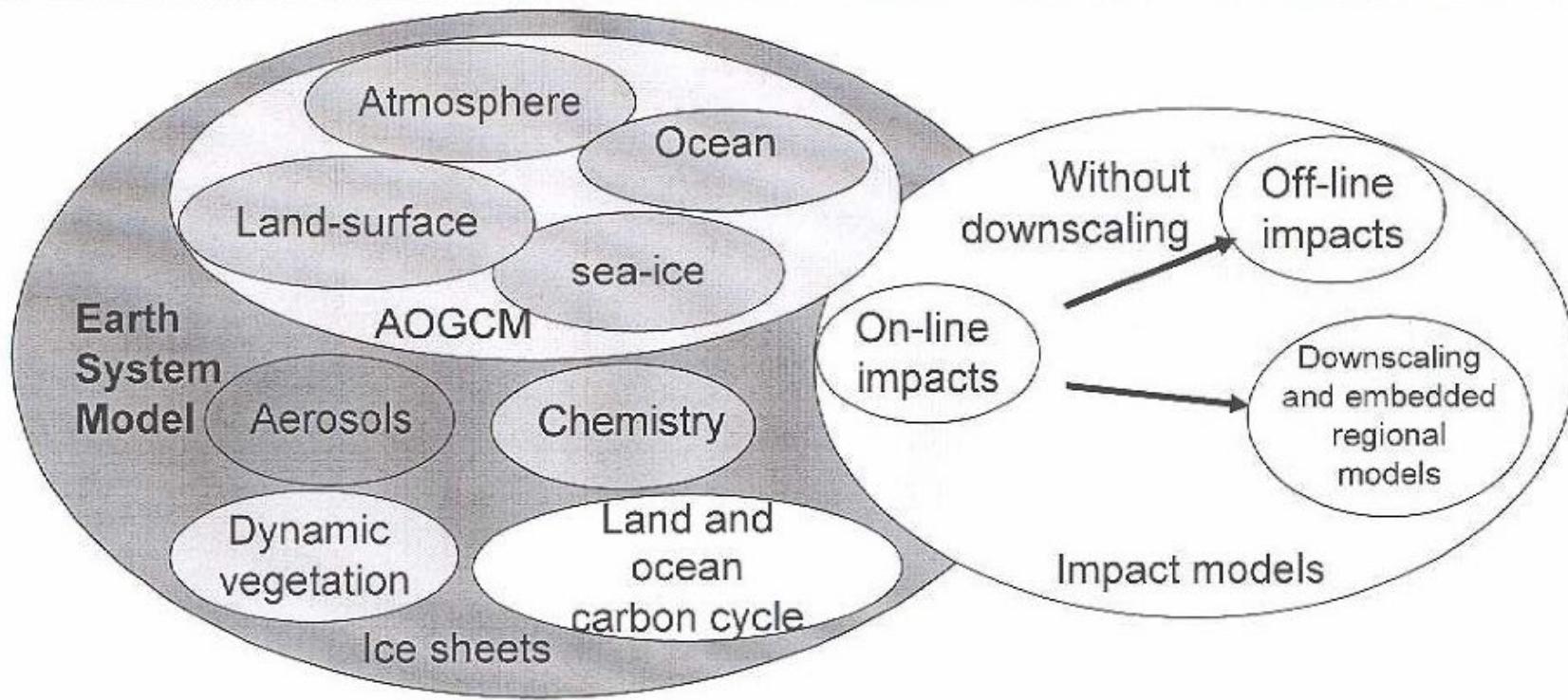
Apply the forcing to
the model, get
 $\delta \langle W \rangle$



Reconstruct the
forcing as
 $M^{-1} \delta \langle W \rangle$

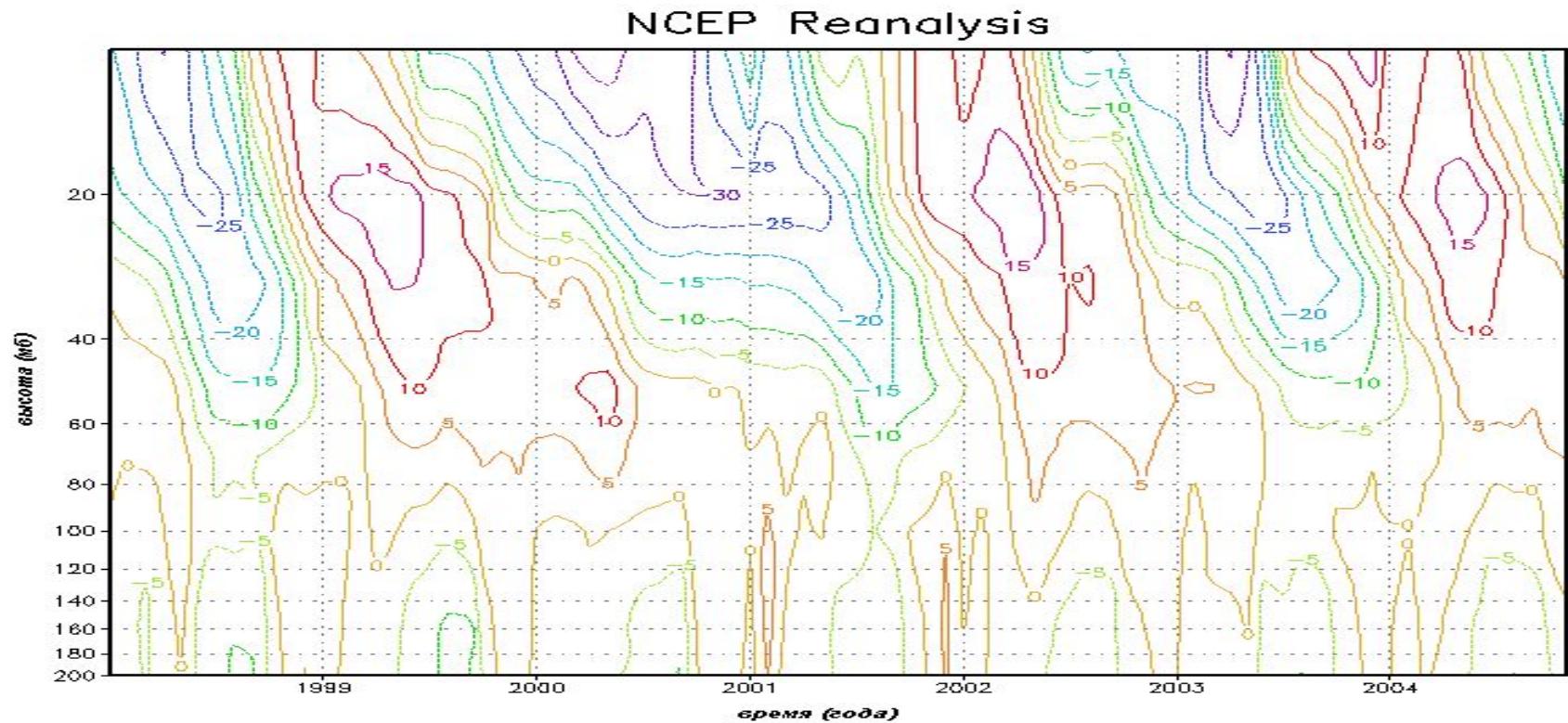
Model response (right) onto the heating (top left) was multiplied by the inverse response operator.
Reconstructed forcing is shown on the (bottom left)

FROM ESMs TO IMPACTS



Schematic of an AOGCM (oval at upper left) and Earth System model (in orange oval) and various types of impact models (right).

Введение. Квазидвухлетние колебания (КДК)



- Экваториальный захват (симметричная структура по широте)
- меняющийся период ~24-30 месяцев
- Зона распространения: ~80 – 10 Мб (20 – 70 км) с максимумами амплитуды зональной скорости ~ 30 м/с на высотах ~ 20-10 Мб
- Медленное опускание фаз колебаний со скоростью порядка 1 км/месяц

Модель совместного действия двух типов волн

Формирование колебаний зональной скорости на основе учета взаимодействия зонального потока с **длинными и гравитационными волнами**: упрощенная двумерная модель для эволюции осредненных компонент зональной скорости при наличии двух разнонаправленных длинных волн (по модели **Пламба**) и непрерывного линейного спектра гравитационных волн (задаваемых параметризацией **Хинса**):

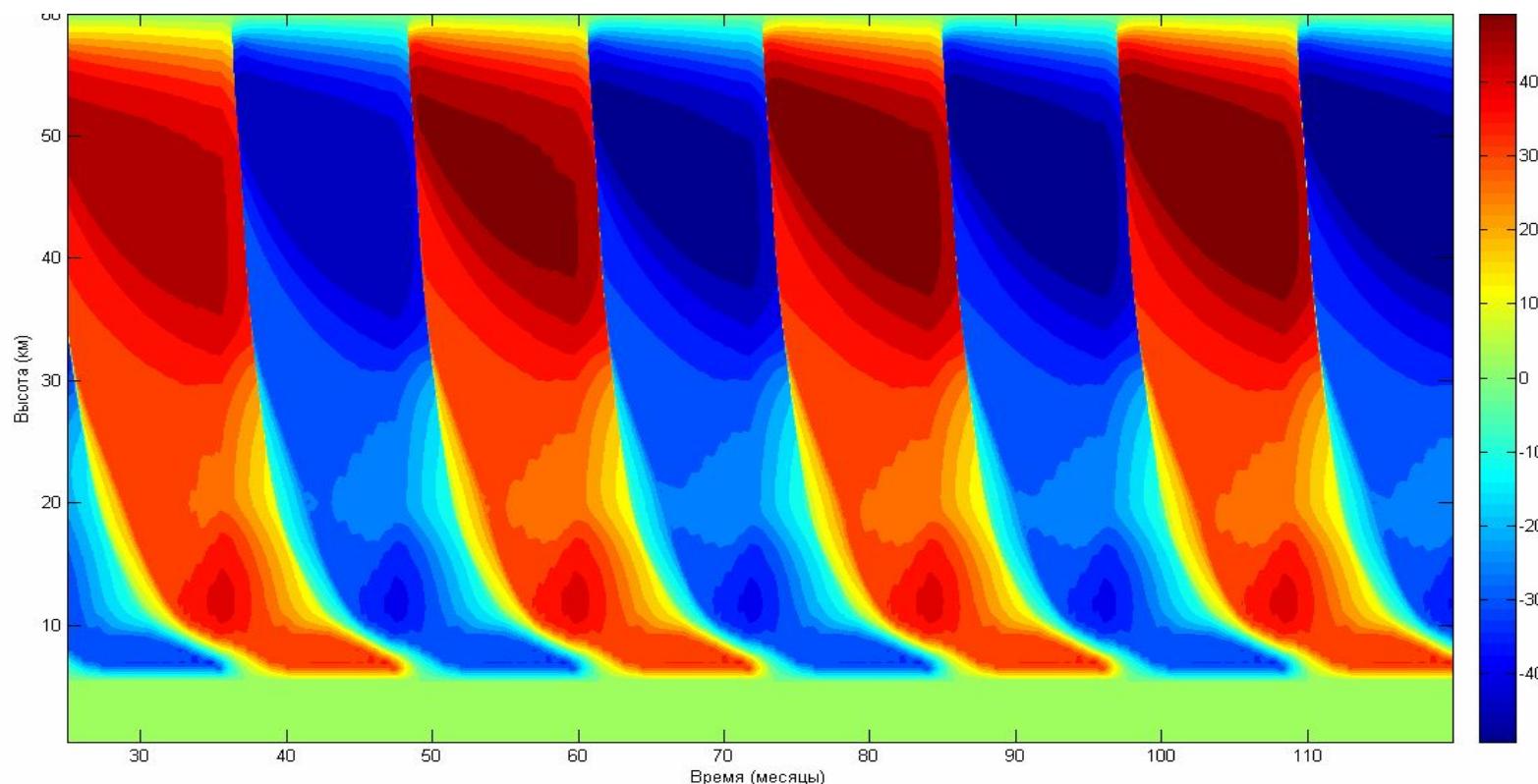
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial^2 z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F_{Plumb} + F_{Hines})}{\partial z}$$

$$F_{Plumb}(z) = \rho(z) \sum_n F_n(z_0) \exp \left\{ - \int_0^z \frac{N(z') v}{k_n (\bar{u}(z') - c_n)^2} dz' \right\},$$

$$F_{Hines}(z) = \rho(z_0) \sigma(z_0)^2 h C (m^+_{iC}(z) - m^-_{iC}(z)).$$

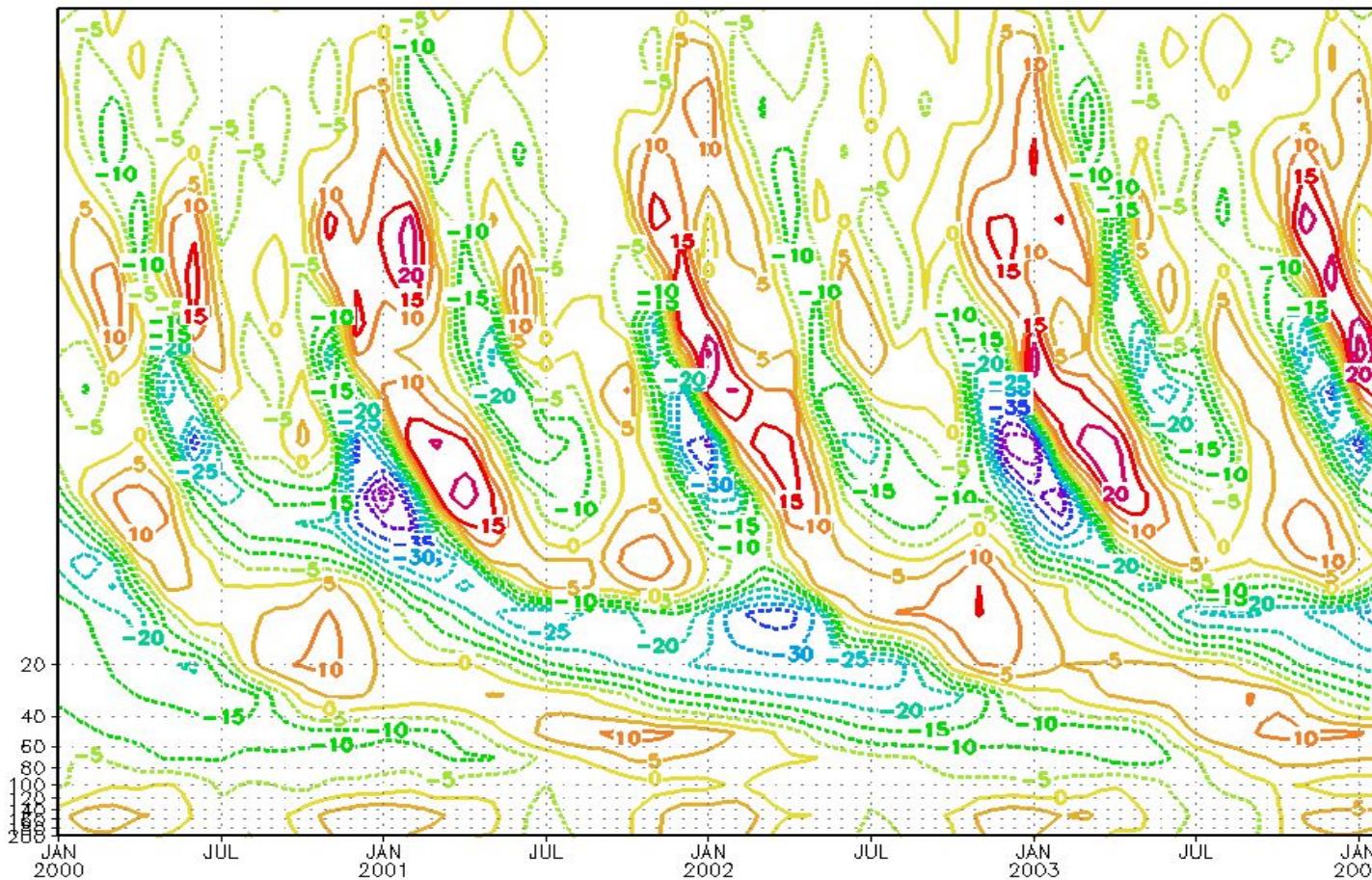
Основные результаты совместного моделирования

1. При реалистичных значениях волновых энергий длинных волн и полученных параметрах обрушения гравитационных волн получены колебания, близкие к наблюдаемым КДК.
2. Основное взаимодействие **длинных экваториальных волн** с зональным потоком происходит в нижних слоях стратосферы.
3. Обрушение **гравитационных волн** происходит верхней стратосфере, гравитационные волны играют **второстепенную роль** в формировании периода.



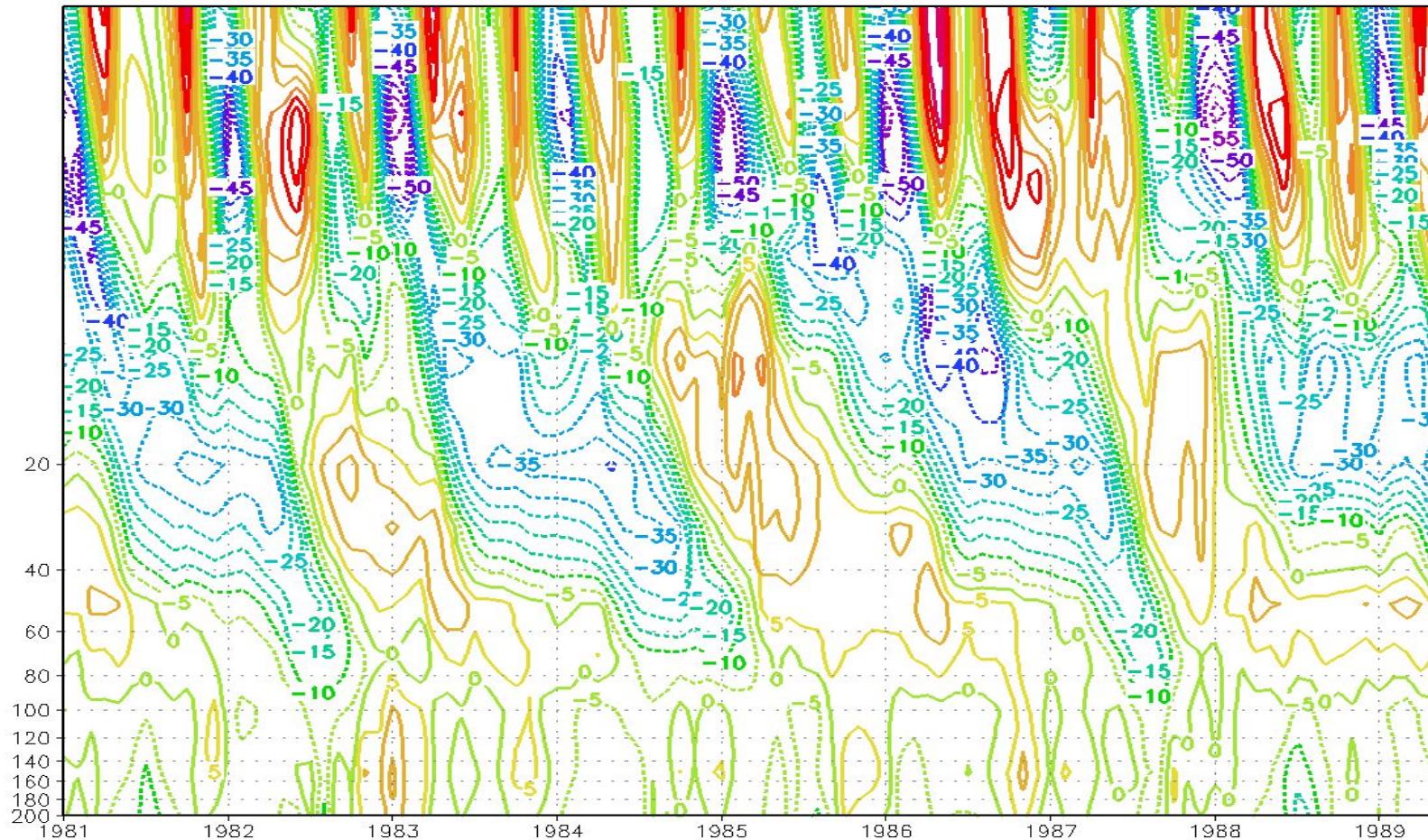
Результаты экспериментов по моделированию КДК в модели общей циркуляции ИВМ РАН $2^{\circ}\times2.5^{\circ}\times80$.

Основная задача – получение КДК с реалистичными характеристиками
(действуют оба механизма – **поглощение длинных волн и обрушение гравитационных волн**)

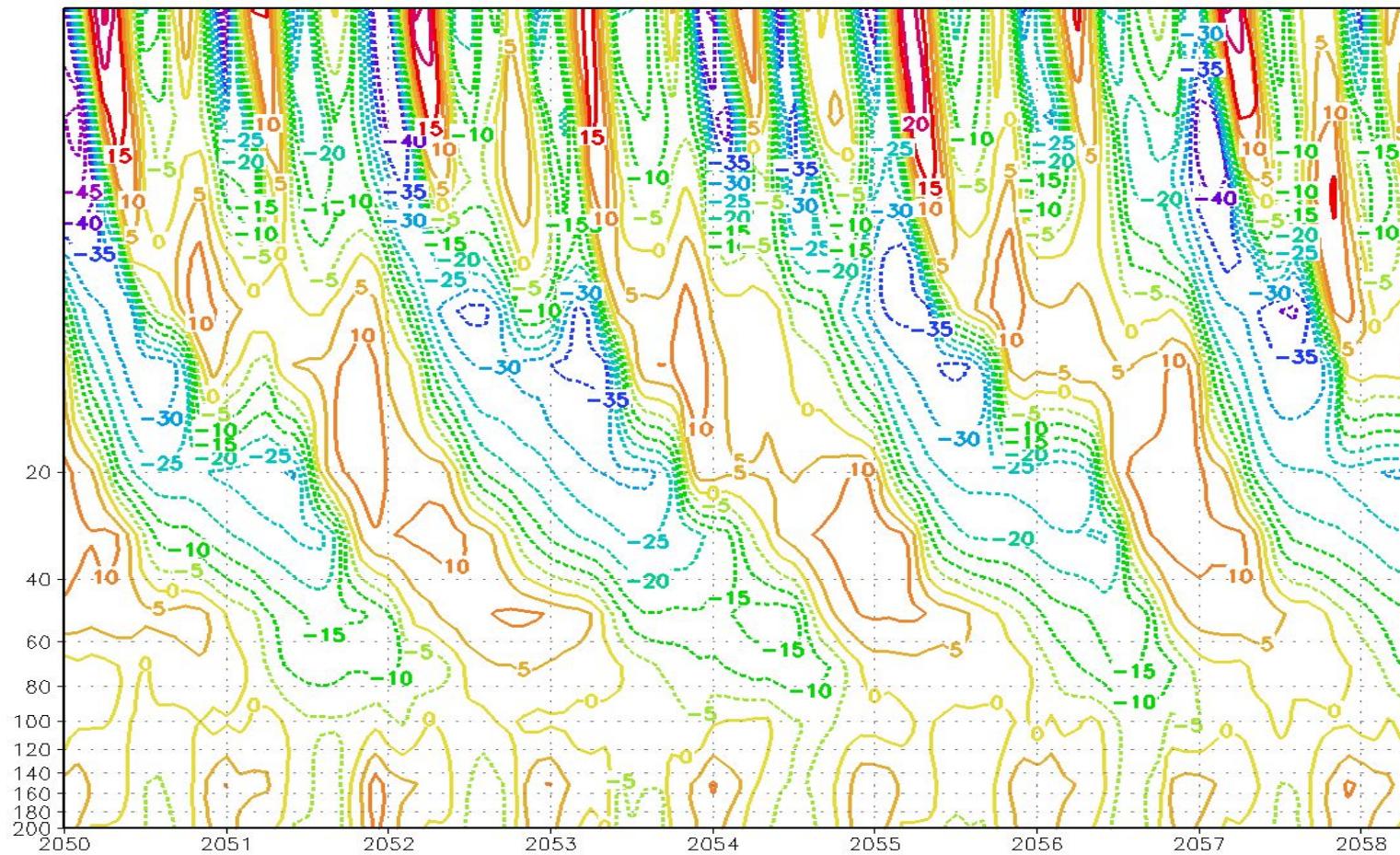


Для модели $2^{\circ}\times2.5^{\circ}\times80$ получены реалистичные КДК (подстроен параметр вертикальной диффузии)

Era-40



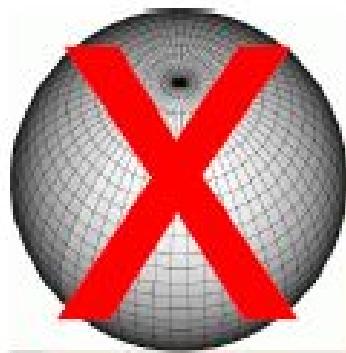
model



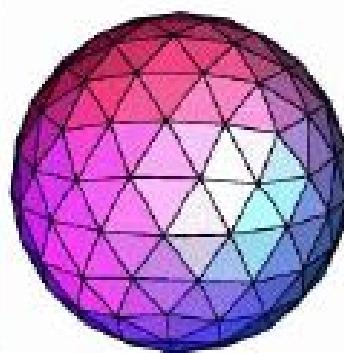
Выбор сетки

- Традиционные широтно-долготные сетки имеют сгущение меридианов у полюсов.

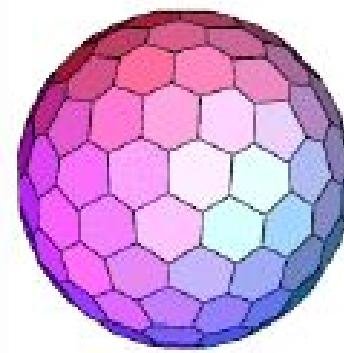
(картинки из презентации W.Skamarock, NCAR)



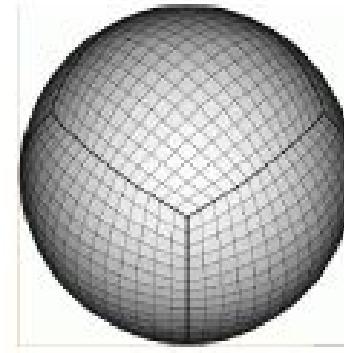
lat-long grid



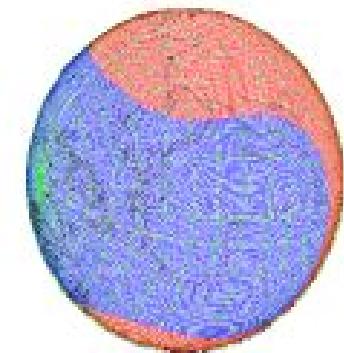
icosahedral grid
(triangles)



icosahedral grid
(hexagons)



cubed sphere



Yin-Yang grid